



Université d'Ottawa - University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 A – Test 3 – V.1

Professeur : Abdelkrim El basraoui

09 Novembre 2017

Solution

Nom : _____ Prénom : _____

Numéro d'étudiant : _____

Intructions:

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 à 5 valent 6 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 6 est une question bonus qui vaut 1 point. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 6, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les éteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: _____

[Handwritten signature]
1

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2
C	C

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 20

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

$$U = \{(x^4, 2x + y, x - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(x, y, 3x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x, y, xy - 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$X = \{(x, y, z) \mid 2x - \pi y + z = 0\}$$

A. Seulement U et V

B. Seulement U et W

C. Seulement V et X

D. Seulement U, W et X

E. Seulement U, V et X

F. Seulement V et W

• U n'est pas fermé pour la multiplication scalaire, car pour $x = y = 1$ on a $u = (1, 3, -1) \in U$ mais $(-1) \cdot u \notin U$ car $(-1) \cdot u = (-1, -3, 1)$ ne vérifie pas que $(-1)^4 \neq -1$.

• $V = \{x(1, 0, 3) + y(0, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 3), (0, 1, -1)\}$
Donc V est un s-es de \mathbb{R}^3 .

• W n'est pas un s-es de \mathbb{R}^3 car $(0, 0, 0) \notin W$.
En fait, si $(x, y, xy - 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$ impossible.

• X est un plan passant par l'origine et donc est un s-es de \mathbb{R}^3 .

2. Parmi les énoncés suivants le ou lesquel(s) est/sont vrais?

I. L'ensemble des vecteurs $\{(1, 2), (2, 1), (0, 1)\}$ engendrent \mathbb{R}^2 . **Vrai**

II. L'ensemble $\{(x, y, z) \mid x - y + 2z = -1\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^3 . **Faux**

III. Si dans un espace vectoriel V il existe un vecteur qui est combinaison linéaire de $u - v$ et $u + w$ alors les vecteurs $\{u, v, w\}$ de V engendrent V . **Faux**

IV. L'ensemble $\{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(-1) = 0\}$ est un sous-espace de \mathbb{P}_2 , où \mathbb{P}_2 l'espace des polynômes de degré au plus 2. **Vrai**

V. L'ensemble $\{\cos^2(3x), \sin^2(3x), 2\}$ est linéairement dépendant dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, où $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} . **Vrai**

A. Seulement I, II et III

B. Seulement II, III et IV

C. Seulement I, IV et V

D. Seulement II, III et V

E. Seulement I, II, IV, et V

F. Tous les énoncés.

I. Car $x_1(1, 2) + x_2(2, 1) + x_3(0, 1) = (b_1, b_2)$
est compatible pour tout $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

II. C'est un plan qui ne pas pas par l'origine.

III. Vrai (Version 2)

IV. $U = \text{Vect}\{x^2 - 1, x + 1\}$

V. $(2) \cdot \cos^2(3x) + (2) \cdot \sin^2(3x) = (1) \cdot 2$

3. Soit le sous-ensemble de $M_{2,2}$, l'espace des matrices 2×2 , suivant $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a+b-c=0 \right\}$.
 $a+b-c=0 \iff c=a+b$.

a) Montrez que W est un sous-espace de $M_{2,2}$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc $W = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

et d'où est un s-es de $M_{2,2}$.

b) Donnez un ensemble de vecteurs qui engendre W .

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) En déduire une base pour W et donnez sa dimension.

S engendre W et est linéairement indépendant.

Donc S forme une base de W .

On a $\dim W = 3$.

4. Dans \mathbb{P}_2 , l'espace des polynômes de degré au plus 2 et à coefficients réels, soit

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(1) = 0\}.$$

a) Vérifiez que U est fermé pour la multiplication scalaire, ou bien exprimez U sous une forme qui montre que U est un sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de \mathbb{P}_2 .)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b).

(Justifiez vos réponses.)

a) Si $p(x) = ax^2 + bx + c \in U$, alors $p(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$
 $\Leftrightarrow c = -a - b \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$.

Donc $U = \{a(x^2 - 1) + b(x - 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \{x^2 - 1, x - 1\}$
et alors est un s-es de \mathbb{P}_2 . D'où U est fermé pour la multiplication scalaire.

b/ $\left\{ \overset{p(x)}{x^2 - 1}, \overset{q(x)}{x - 1} \right\}$ engendre U et est linéairement indépendant (à cause du degré de ces 2 polynômes, donc forme une base de U .

On a $\dim U = 2$.

c/ $\{p(x) - q(x), q(x)\}$ est aussi une base de U .

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (peut-être) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (peut-être) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre**. Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1)f(2) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. ($f(1)f(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ \text{ou} \\ f(2) = 0 \end{cases}$)

On a $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x - 2 \in X$ car $f(1) = g(2) = 0$, mais

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 - x + x - 2 = -1 \neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc $f+g \notin X$ et X n'est pas un s-es de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$

$$\text{car } (f+g)(1) = (f+g)(2) = -1 \neq 0.$$

RÉPONSE:

Faux

b) Soit V est un espace vectoriel. Si $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendant dans V , alors pour tout vecteur $v_3 \notin \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement dépendant dans V .

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement dépendant, alors il existerait une solution non-triviale (s_1, s_2, s_3) de $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0_V$.

C'est-à-dire $s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = 0_V \Leftrightarrow -s_3 v_3 = s_1 v_1 + s_2 v_2$

$$\Leftrightarrow v_3 = \left(-\frac{s_1}{s_3}\right) v_1 + \left(-\frac{s_2}{s_3}\right) v_2 \Leftrightarrow v_3 \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}. \text{ Contradiction.}$$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est aussi linéairement indépendant.

RÉPONSE:

Faux

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2} \mid ad=0 \right\} \stackrel{=X}{\text{est un sous-espace de } M_{2,2}}$. $ad=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \text{ou} \\ d=0 \end{cases}$
On a $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in X$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in X$, mais
 $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin X$ car $(1)(1) = 1 \neq 0$.

RÉPONSE:

Faux

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U . Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3\}$ est aussi linéairement indépendant.

$$\text{Si } x_1 \cdot (u_1 + u_2) + x_2 \cdot (u_2 - u_3) + x_3 \cdot u_3 = 0_U$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot u_1 + (x_1 + x_2) \cdot u_2 + (x_3 - x_2) \cdot u_3 = 0_U$$

Comme $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant alors

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{seule la solution triviale})$$

Donc $\{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3\}$ est linéairement indépendant

RÉPONSE:

Vrai

6. [Bonus] Sachant que $V = \mathbb{R}^2$ muni des opérations non-standards suivantes:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2)$$

$$k \boxtimes (x, y) = (kx - 2k + 2, ky)$$

est un espace vectoriel, trouvez l'inverse additive du vecteur $(0,0)$ de \mathbb{R}^2 par rapport à ces opérations.

• On a $0_V = 0 \boxtimes (x, y) = (2, 0)$. ($k=0$)

• Donc, si (x, y) est l'inverse additive de $(0,0)$ alors

$$(0,0) \oplus (x,y) = (x,y) \oplus (0,0) = (x-2, y) = (2,0) = 0_V.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}.$$

Donc l'inverse additive de $(0,0)$ est $(4,0)$.



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 A – Test 3 – V.2

Professeur : Abdelkrim El basraoui

09 Novembre 2017

Nom : _____ Prénom : _____

Solution

Numéro d'étudiant : _____

Intructions:

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 à 5 valent 6 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 6 est une question bonus qui vaut 1 point. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 6, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les éteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: _____

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2
C	A

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 20

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

$$U = \{(x - 4y, x + y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0) + y(-4, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-4, 1, -1)\}$$

Donc U est un s-es de \mathbb{R}^3 .

$$V = \{(x, y - x, 3x^4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x, 2 - xy, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$X = \{(x, y, z) \mid x + 3y - e^2 z = 0\}$$

• V n'est pas fermé pour la multiplication scalaire, car pour $x=1, y=0, (1, -1, 3) \in V$ mais $(-1) \cdot (1, -1, 3) = (-1, 1, -3) \notin V$ car $-3 \neq 3(-1)^4 = 3$.
Donc n'est pas un s-es de \mathbb{R}^3 .

• W ne contient pas $(0, 0, 0)$ car si $(x, 2 - xy, x) = (0, 0, 0)$ alors $(x=0, 2 - xy=0, x=0) \Leftrightarrow (x=0, 2=0)$ impossible.
Donc W n'est pas un s-es de \mathbb{R}^3 .

• X est un plan passant par l'origine et donc est un s-es de \mathbb{R}^3 .

A. Seulement U et V

B. Seulement V et X

C. Seulement U et X

D. Seulement V, W et X

E. Seulement U, V et X

F. Seulement V et W

2. Parmi les énoncés suivants le ou lequel(s) est/sont vrais?

I. L'ensemble des vecteurs $\{(1, 2), (2, 1), (0, 1)\}$ est linéairement dépendant dans \mathbb{R}^2 . **Vrai**

II. L'ensemble $\{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$ est un s-espace de \mathbb{R}^3 . **Vrai**

III. Si dans un espace vectoriel V il existe un vecteur qui est combinaison linéaire de $u - v$ et $u + w$ alors les vecteurs $\{u, v, w\}$ de V engendrent V . **Faux**

IV. L'ensemble $\{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p(2) = 0\}$ est un sous-espace de \mathbb{P}_3 , où \mathbb{P}_3 l'espace des polynômes de degré au plus 3. **Vrai**

V. L'ensemble $\{\cos^2(2x), \sin^2(2x), 3\}$ est linéairement indépendant dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} . **Faux**

A. Seulement I, II et IV

B. Seulement II, III et IV

C. Seulement I, IV et V

D. Seulement II, III et V

E. Seulement I, II, IV, et V

F. Tous les énoncés.

I. car $\frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 = u_3$.

II. C'est un plan passant par l'origine

III. Pas tous les vecteurs de V sont combinaisons linéaires de $u - v$ et $u + w$.

IV. $U = \text{Vect}\{x^2 - 4, x - 2\}$.

V. $(3) \cdot \cos^2(2x) + (3) \cdot \sin^2(2x) = (1) \cdot 3$.

3. Soit le sous-ensemble de $M_{2,2}$, l'espace des matrices 2×2 , suivant $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a - 2b - d = 0 \right\}$. $a - 2b - d = 0 \Leftrightarrow d = a - 2b$

a) Montrez que W est un sous-espace de $M_{2,2}$.

$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a-2b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
Donc $W = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.
et donc W est un s-es de $M_{2,2}$ ✓

b) Donnez un ensemble de vecteurs qui engendre W .

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

c) En déduire une base pour W et donnez sa dimension.

L'ensemble S engendre W et est linéairement indépendant.

Donc S forme une base de W . On a

$$\dim W = 3.$$

4. Dans \mathbb{P}_2 , l'espace des polynômes de degré au plus 2 et à coefficients réels, soit

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(-1) = 0\}.$$

a) Vérifiez que U est fermé pour la multiplication scalaire, ou bien exprimez U sous une forme qui montre que U est un sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de \mathbb{P}_2 .)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b).

(Justifiez vos réponses.)

a) Si $p(x) = ax^2 + bx + c \in U$, alors $p(-1) = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = b - a. \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx + b - a = a(x^2 - 1) + b(x + 1)$$

$$\text{Donc } U = \{a(x^2 - 1) + b(x + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\Leftrightarrow U = \text{Vect} \{x^2 - 1, x + 1\}.$$

Donc U est un s-es de \mathbb{P}_2 et d'où est fermé par la multiplication scalaire.

b) Comme $\underbrace{x^2 - 1}_{p(x)}, \underbrace{x + 1}_{q(x)}$ engendrent U et est linéairement indépendant (à cause du degré de ces deux polynômes), alors forme une base de U .

On a $\dim U = 2$.

c) $\{p(x) + q(x), q(x)\} = \{x^2 + x, x + 1\}$ est aussi une base de U .

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (peut-être) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (peut-être) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre**. Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1)f(0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. ($f(1) \cdot f(0) = 0 \iff (f(1) = 0 \text{ ou } f(0) = 0)$)

On a $f(x) = 1-x$ et $g(x) = x \in X$ car $f(1) = 0 = g(0)$.

Mais $f+g \notin X$, car $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1-x+x = 1 \neq 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

et donc $(f+g)(1) = (f+g)(0) = 1 \neq 0$

RÉPONSE:

Faux.

b) Soit V est un espace vectoriel. Si dans V pour tout vecteur $v_3 \notin \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant dans V , alors $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendant dans V .

Si $\{v_1, v_2\}$ est linéairement dépendant, alors il en est de même que $\{v_1, v_2, v_3\}$ ce qui n'est pas le cas.

RÉPONSE:

Vrai

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2} \mid a+d=0 \right\} = X$ est un sous-espace de $M_{2,2}$. $a+d=0 \Leftrightarrow d=-a$

$$\text{Donc } X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow X = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

et donc est un s.-es de $M_{2,2}$.

RÉPONSE:

Vrai

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U . Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3\}$ est linéairement dépendant.

$$\text{Cas, si } x_1(u_1 + u_2) + x_2(u_2 - u_3) + x_3 \cdot u_3 = 0_U$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot u_1 + (x_1 + x_2) \cdot u_2 + (x_3 - x_2) \cdot u_3 = 0_U$$

et comme $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{seule la} \\ \text{(solution triviale)} \end{array}$$

D'où $\{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3\}$ est linéairement indépendant.

RÉPONSE:

Faux

6. [Bonus] Sachant que $V = \mathbb{R}^2$ muni des opérations non-standards suivantes:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 - 2)$$

$$k \boxtimes (x, y) = (kx, ky - 2k + 2)$$

est un espace vectoriel, trouvez l'inverse additive du vecteur $(0,0)$ de \mathbb{R}^2 par rapport à ces opérations.

Voir Version 1.