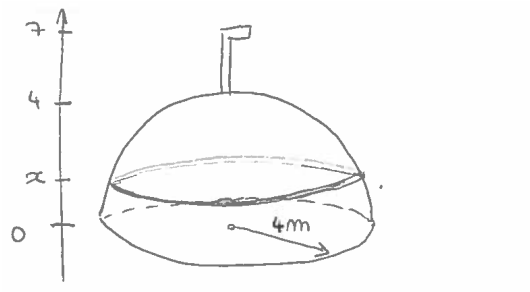
N° ÉTUDIANT :

MAT 1722 C **TEST 1** **28 SEPTEMBRE 2017**

Exercice 1

Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 4 m de rayon, posé sur sa face plate comme le montre la figure, il est rempli d'eau et on veut pomper toute cette eau à 3 m au-dessus du réservoir. On note x l'altitude en m mesurée depuis le fond du réservoir (voir figure).



1. Quelle est en première approximation, le volume ΔV d'une couche mince d'eau entre les altitudes x et $x + \Delta x$?

   Réponse : D'après le théorème de Pythagore (dessin) le rayon du cercle obtenu par l'intersection de la demi-sphère avec le plan horizontal à hauteur x est $r(x) = \sqrt{4^2 - x^2} = \sqrt{16 - x^2}$. Donc le volume d'une couche mince de réservoir entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ est en première approximation :

$$\Delta V(x) = \pi r(x)^2 \Delta x = \pi(16 - x^2)\Delta x \mathrm{m}^3.$$

2. Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette couche mince d'eau à 3 m au-dessus du réservoir ? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m^3, et que $g \simeq 9.8$ m/s^2.

   Réponse : Le travail requis pour pomper cette couche d'eau à 3 m au dessus du réservoir est son poids (= volume $\times\ \rho g$) multiplié par la distance à parcourir ($= 4 + 3 - x = 7 - x$). On obtient donc

$$\begin{aligned}\Delta W(x) &= \Delta V(x)\rho g(7 - x)\\ &= \rho g\pi(16 - x^2)(7 - x)\Delta x\\ &= \rho g\pi(x^3 - 7x^2 - 16x + 112)\Delta x \text{ J}.\end{aligned}$$

3. Quel est le travail requis pour pomper toute l'eau à 3 m au-dessus du réservoir ? Écrire seulement l'intégrale. (Ce n'est pas nécessaire de la calculer.)

   Réponse : Le travail requis pour vider le réservoir est la somme des travaux requis pour pomper chaque couche mince. On en déduit :

$$W = \int_0^4 \rho g\pi(x^3 - 7x^2 - 16x + 112)dx.$$

../..

Exercice 2

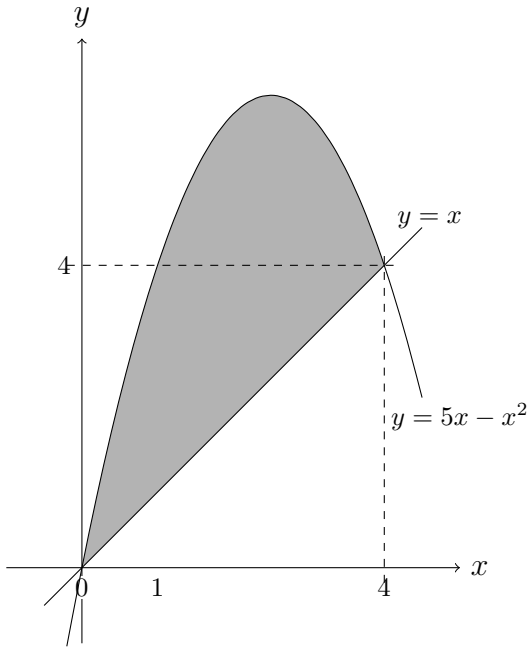
Représentez la région bornée du plan délimitée par les courbes $y = 5x - x^2$ et $y = x$, et calculez son aire.

Réponse :

On détermine les points d'intersection des deux courbes :

$$\begin{aligned} 5x - x^2 = x &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Les points d'intersection sont donc $(0, 0)$ et $(4, 4)$.



L'aire de la région est

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 (5x - x^2 - x)dx \\ &= \int_0^4 (4x - x^2)dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 \\ &= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \simeq 10.7 \end{aligned}$$