$a = 1^e$ term, $r = \frac{a_2}{a_1}$

Calcul 2 → Test #2

Une serie admet la limite "L" si $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ et si $f(n) = a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ et $\lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} c = L$, $\lim_{n\to\infty} b = L$ (Squeeze theorem)

Q1 = conv./div. d'une suite Q2 = terme générale d'une suite

Q3/4 = convergence ou divergence d'une série

Q5/6 = estimation d'une somme à un certain taux de précision

(Q1 : Strategies)
- Prendre la limite
- Théorème des sandwichs
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge si $-1 < a \leq 1$. ($L = 0$) diverge si $a > 1$ ou $a < -1$
- Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{S_n\}$ est une suite qui aide à déterminer la conv/div. de la suite originale.

$r = \frac{a_2}{a_1}$, $a = 1^e$ terme et la suite $\boxed{\text{converge}}$ vers $\frac{a}{1-r}$ (lorsque $r < 1$) Si $r > 1$, c'est $\boxed{\text{divergent}}$

Ex: $2,3\overline{17}$ sous-rapport entier :

$$2,3\overline{17} = 2,3 + 0,0171717\ldots$$
$$= 2,3 + (0,017 \xrightarrow{\times 10^{-2}} 0,00017 \xrightarrow{\times 10^{-2}} 0,0000017\ldots)$$

$a = 0,017$

$r = \frac{1}{100}$ $r < 1$, converge vers $\frac{0,017}{1-\frac{1}{100}} = \frac{0,017 \cdot 100}{99} = \frac{17}{990}$

$$2{,}3 + \frac{17}{990} = \frac{23}{10} + \frac{17}{990}$$

$$= \frac{2294}{990}$$

$\{S_n\}$ ‖ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ ‖ $a_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = S_n$ ‖

1. Test de divergence : si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, Σa_n est divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est divergent si $p = 1$, si $p < 0$. } Série de Riemann
est convergent si $p > 1$

$$a_n = S_n - (S_{n-1}) = \sum_{k=b}^{n} - \sum_{k=b}^{n-1}$$

2. Test de l'intégrale : $f(x)$ doit être continue, positif, et decroissante éventuellement sur $[1, \infty[$.

Déterminer le domaine où ces conditions sont satisfaites ensuite prendre l'intégrale sur le domain (ex : $\int_3^{\infty} f(x)dx$)

Si le test donne $-\infty$ ou ∞, la suite est divergente.
(Ce test est pas mal long donc utilise-le en dernier)

3. Test de comparaison : Trouver une suite qui est plus simple, plus petit/plus grand que l'originale.

Si le plus petit diverge, le plus grand diverge.
Si le plus grand diverge, on ne sait rien
Si le plus petit converge on ne sait rien.
Si le plus grand converge, le plus petit converge.

Ex : $a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3} \Rightarrow b_n = \frac{5}{2n^2}$ | $2n^2+4n+3 > 2n^2 \therefore \underbrace{\frac{5}{2n^2+4n+3}}_{a_n} < \underbrace{\frac{5}{2n^2}}_{b_n}$

b_n converge et donc a_n converge aussi.

séparer le num. et dénum.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ num: $5 \to 5$ lorsque $n \to \infty$
dénum: $2n^2+4n+3 \to 2n^2$ lorsque $n \to \infty$ ($2n^2$ est dominant)

4. Test de comparaison (forme limite): $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$.

si $C>0$ et $C \neq \infty$, les deux séries se comportent de la même façon.

Ordre la plus efficace

Test divergence => test de comparaison (limites) => test de comparaison => test de l'intégrale.

5. Test des séries alternées ($b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \ldots$)

Si a) $\underbrace{b_{n+1} < b_n}_{b_n \text{ est décroissant}}$ et b) $\lim b_n = 0$ (si $\lim \neq 0$, il y a aucune conclusion)
c) a_n doit être positif

La série converge si les ~~deux~~ trois conditions sont satisfaites.

6. Convergence absolue: une série est absolument convergente si la série de valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente

Si a_n est absolument convergente, elle est aussi convergente.

7. Test du quotient/rapport/d'Alembert

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, si $L<1$, la série est convergente.
si $L>1$, la série est divergente.
si $L=1$, on ne sait rien.

8. Critère de Cauchy $L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, si $L>1$, divergent
si $L<1$, absolument converge
si $L=1$?

$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)$
$= \frac{2}{3}$

Hilroy

Estimation de somme

· Supposer qu'on peut utiliser le test de l'intégrale.

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $R_n = S - S_n = (a_n+1) + (a_n+2) + (a_n+3)\dots$

R_n est l'erreur comprise lorsque S_n (la somme des n premiers termes) est utilisée comme approximation de la somme de la série

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \leq \int_n^\infty f(x)\,dx$ et

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \geq \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$

Donc: $\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)dx$

Ex: Approximer $\sum \frac{1}{n^3}$ avec ses 10 premiers termes et estimer l'erreur

$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} = S_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1,1975$ $R_{10} \leq \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$

Donc, la taille maximale est $\frac{1}{200}$.

Combien de termes pour assurer une erreur moins de 0,0005

$R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3} dx \leq 0,0005$ Donc: $\frac{1}{2n^2} \leq 0,0005$

$n^2 > \frac{1}{2(0,0005)}$

$n > \sqrt{1000}$

$n > 31,6$

Donc il faut 32 termes pour une erreur moins de 0,0005.

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq s \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Ceci est vrai car $s_n + R_n = s$, ça donne une estimation plus précise que la somme partielle (s_n).

Ex: Déterminer la somme $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3}$

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$1{,}201664 \leq s \leq 1{,}202532$$