1. Soient $A = \{1,2,3,4,5\}$ et $B = \{1,3,4,6,9\}$. Déterminez les ensembles ou les nombres suivants :
a) $A - B$ b) $A \oplus B$ c) $(A \cup B) - (A \cap B)$ d) $|A \cap B|$ e) $|\mathrm{P(A)}|$ (5 points)

a) $A-B = \{2,5\}$ b) $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \{2,5\} \cup \{6,9\} = \{2,5,6,9\}$

c) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,9\}$ $A \cap B = \{1,3,4\}$
$A \cup B - (A \cap B) = \{2,5,6,9\}$

d) $|A \cap B| = |\{1,3,4\}| = 3$

e) $|A| = 5$, $|P(A)| = 2^5 = 32$.

2. Soit U un ensemble universel ayant comme sous-ensembles A et B. Démontrez les résultats suivants (sans utiliser la table des identités sur les ensembles).

a) Si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$, alors $A \cup C \subseteq B \cup D$ (2 points)
b) Si $A \subseteq B$ alors $A \cap \overline{B} = \emptyset$ (2 points)

($A \subseteq B \Rightarrow$ si $x \in A$ alors $x \in B$
$C \subseteq D \Rightarrow$ si $x \in C$ alors $x \in D$)

a) Si $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A$ ou $x \in C$
$\Rightarrow x \in B$ ou $x \in D$
$\Rightarrow x \in B \cup D$
$\therefore$ $\boxed{A \cup C \subseteq B \cup D}$

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \bar{B} = \phi$
Supposons la contradiction :
$A \subseteq B$ et $A \cap \bar{B} \neq \phi$
$\Rightarrow$ il existe $x \in A$ et $x \in \bar{B}$
$\Rightarrow$ il existe x tel que $x \in A$ et $x \notin B$
$\Rightarrow A \not\subseteq B$ ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \bar{B} = \phi$

3. Utilisez le tableau des propriétés des ensembles (disponible à la page 7) pour démontrer que $A-(B-\overline{C})=(A-B)\cup(A-C)$. Écrivez le numéro de la propriété que vous utilisez à chaque étape. (3 points)

$A-(B-\overline{C}) = A\cap\overline{(B-\overline{C})}$ règle 1

$= A\cap\overline{(B\cap\overline{\overline{C}})}$ règle 1

$= A\cap\overline{(B\cap C)}$ règle 10

$= A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$ règle 18

$= (A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$ règle 15

$= (A-B)\cup(A-C)$ règle 1

4. a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=6x-9$. Démontrez que f est une fonction bijective. (3 points)

b) Déterminez la fonction inverse de f. Montrez votre démarche. (2 points)

a) $f(x)=6x-9$.   Si: $f(x)=f(y) \Rightarrow 6x-9=6y-9$
$\Rightarrow 6x=6y$
$\Rightarrow x=y$.

Donc, f est injective.

Supposons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=y$, où $y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow 6x-9=y \Rightarrow x=\frac{y+9}{6}$

Donc, pour $y\in\mathbb{R}$, $f\left(\frac{y+9}{6}\right)=6\left(\frac{y+9}{6}\right)-9=y+9-9=y\in\mathbb{R}$.

b) f est bijective, donc f^{-1} existe.

$(f\circ f^{-1})(x)=i(x)$, où $i(x)=x$ est la fonction identité.

$\Rightarrow f(f^{-1}(x))=i(x)=x \Rightarrow f(f^{-1}(x))=x$

$\Rightarrow 6(f^{-1}(x))-9=x$

$\Rightarrow 6(f^{-1}(x))=x+9 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+9}{6}}$

5. Soient f, g, h, j des fonctions de $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ telles que : $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3$; $g(1) = 1, g(2) = 4, g(3) = 2, g(4) = 3$; $h(1) = 4, h(2) = 3, h(3) = 2, h(4) = 1$. Déterminez les fonctions suivantes :

a) $f \circ g$ b) $h \circ f$ (4 points)

a) $(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$, $(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 3$
$(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 1$, $(f\circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = 4$

b) $(h\circ f)(1) = h(f(1)) = h(2) = 3$, $(h\circ f)(2) = h(f(2)) = h(1) = 4$
$(h\circ f)(3) = h(f(3)) = h(4) = 1$, $(h\circ f)(4) = h(f(4)) = h(3) = 2$

6. Soit $A = \mathbb{N}$ et $R = \{(a,b) \in A \times A \mid \frac{a}{b} = 2^k, \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminez si R est une relation d'équivalence. Vous devez montrer tous vos raisonnements. (4 points)

Reflexive? Si $a \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} (a,a) \in R$

Si $a \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{a} = 1 = 2^0$ et $0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a,a) \in R$

Symmetrique : Si $(a,b) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (b,a) \in R$

Si $(a,b) \in R \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{1}{a/b} = \frac{1}{2^k} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^{-k} = 2^t$, où $t = -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (b,a) \in R$.

Transitive : Si $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (a,c) \in R$

$(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^{k_1}$, $\frac{b}{c} = 2^{k_2} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{b}{c} = \frac{a}{c} = 2^{k_1+k_2}$

$\Rightarrow \frac{a}{c} = 2^k$, où $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (a,c) \in R$. Donc transitive.

d'où R est une relation d'équivalence.

7. Déterminez si la relation binaire $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ab \geq 1\}$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ est réflective, symmétrique, antisymmétrique et transitive. Pour chaque cas, vous devez démontrer pourquoi, si vous croyez que R possède cette propriété. Si non, vous devez donner un contre-exemple. (4 points)

Réflective : Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $(a,a) \in \mathbb{Z}$? Non. $0 \in \mathbb{Z}$, mais $(0,0) \notin R$

Symmétrique : Si $(a,b) \in R \Rightarrow ab \geq 1 \Rightarrow ba \geq 1 \Rightarrow (b,a) \in R$

Oui

antisymmétrique : Si $(a,b) \in R$ et $(b,a) \in R \overset{?}{\Rightarrow} a = b$

Non $(3,1) \in R$ mais $(1,3) \in R$ mais $1 \neq 3$.

Transitive : $(a,b) \in R \Rightarrow ab \geq 1 \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0$ sinon c'est faux.
$(b,c) \in R \Rightarrow bc \geq 1$ $c \neq 0$

$ab \geq 1 \Rightarrow a$ et b ont le même signe (les deux $-$ et $-$ ou $+$ et $+$)
$bc \geq 1 \Rightarrow b$ et c ont le même signe (les deux $-$ et $-$ ou $+$ et $+$)
$\Rightarrow a$ et c ont le même signe.
Si $a \geq 1$ et $c \geq 1 \Rightarrow ac \geq 1$
Si $a \leq -1$ et $c \leq -1 \Rightarrow ac \geq (-1)(-1) = 1$.

Dans tous les cas, $ac \geq 1 \Rightarrow (a,c) \in R$ donc oui.

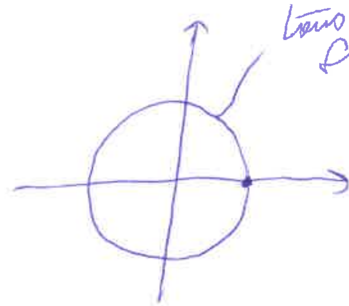
8. Soit $A =$ l'ensemble des codes binaires de longueur 4 et
$R = \{(a, b) \in A \times A \mid$ les deux dernières bits de a et b sont les mêmes$\}$. R est une relation d'équivalences (vous n'avez pas à le démontrer). Déterminez la classe d'équivalence de 1001. Nous cherchons ici une description complète de cette classe d'équivalence et non juste la définition. (2 points)

$[1001]_R = \{b \in A \mid b$ et 1001 ont les mêmes deux dernières bits$\}$
$= \{b \in A \mid b$ a 01 comme deux dernières bits$\}$
$= \{0001, 0101, 1001, 1101\}$.

9. Soit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la relation d'équivalence $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}$ (vous n'avez pas a montrer que c'est une relation d'équivalence). Donnez une description géométrique de la classe d'équivalence du point (3,4) dans A. Votre réponse finale devrait être toute simple et très jolie. (2 points)

$$[(3,4)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 9+16\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 25\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 5^2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x,y) \text{ est sur le cercle de rayon } 5\}$$

~~$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x,y)$~~



tous les points sur cercle de rayon 5.

10. Soit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et la relation d'équivalence
$R = \{((a, b), (c, d)) \mid a \equiv c \ (mod\ 3), b \equiv d \ (mod\ 4)\}$ (vous n'avez pas à le démontrer). Déterminez la partition de A induite par la relation R. Donnez une expression aussi simple et jolie que possible. (2 points)

Si $a \equiv c \pmod 3 \Rightarrow a \equiv c \equiv r_1 \pmod 3$, où $r_1 \in \{0,1,2\}$
Si $b \equiv d \pmod 4 \Rightarrow b \equiv d \equiv r_2 \pmod 4$, où $r_2 \in \{0,1,2,3\}$.

Pour $(a,b) \in A$, $[(a,b)]_R = \{(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a \equiv c \equiv r_1 \pmod 3,\ b \equiv d \equiv r_2 \pmod 4\}$
$= \{(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid c \equiv r_1,\ d \equiv r_2\}$

La partition est donc:
$\{[0]_3\times[0]_4, [0]_3\times[1]_4, [0]_3\times[2]_4, [0]_3\times[3]_4, [1]_3\times[0]_4, [1]_3\times[1]_4, [1]_3\times[2]_4, [1]_3\times[3]_4, [2]_3\times[0]_4, [2]_3\times[1]_4, [2]_3\times[2]_4, [2]_3\times[3]_4\}$