MAT 1741 C – Test 3 – V.1

Professeur : Mathieu Lemire

08 Novembre 2018

Nom : Solutions **Prénom :** ______________________

Numéro d'étudiant : ____________________

Intructions:

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 à 5 valent 6 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 6 est une question bonus qui vaut 1 point. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 6, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les étteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ______________________

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (1 point) ?
$U = \{(x,\ y,\ z) \mid x - z = 0\}$
$V = \{(x^2,\ y,\ x + y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$W = \{(x,\ y,\ 2x - 3y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$X = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 1\}$

$\underline{U:}$ $U = \{(x,y,z) \mid x-z=0\} = \{(x,y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,0,1) + y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \text{vect}\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ oui

V: non $(1,0,1) \in V$ mais $(5,0,3) \notin V$
$(4,0,2) \in V$ $5 = x^2$ (faux)

$\underline{W:}$ $W = \{x(1,0,2) + y(0,1,-3) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
oui

$\underline{X:}$ $\{(x,y,-2x+y+1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ non.
$(+1,+1,0) \in X$ $(1,1,0) + (1,0,-1)$
$(1,0,-1) \in X$ $= (2,1,-1) \notin X$
car $4-1-1 = 2 \neq 1$.

A. Seulement U et V
B. Seulement U et W
C. Seulement U et X
D. Seulement U, W et X
E. Seulement U, V et X
F. Seulement V et W

2. Parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais? (1 point)

I. L'ensemble des vecteurs $\{(1,2),\ (2,1),\ (0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. Oui

II. L'ensemble $\{p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(-1) = -1\}$ est un sous-espace de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est l'espace des polynômes de degré au plus 2. Non

III. Si $\{u,\ v\}$ enegendre un sous espace vectoriel H, alors $\{u - v,\ u + v\}$ aussi engendre H. Oui

IV. L'ensemble $\left\{ A \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, où $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices 2×2.

V. L'ensemble $\{\cos^2(2x),\ \sin^2(2x),\ 2\}$ est linéairement indépendant dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, où $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

A. Seulement I, II et III
B. Seulement I, II et IV
C. Seulement I, III et IV
D. Seulement I, III et V
E. Seulement I, IV, et V
F. Tous les énnoncés.

Ne peut pas avoir II
Donc doit être C, D ou E
Ne peut pas être E.
Donc C ou D

$\underline{IV:}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ de l'ensemble

$(A+B)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

donc oui.

La réponse est C.

3. Soit le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ suivant $W = \{(a-b,\ b-3a,\ 2a,\ a+2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Montrez que W est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. (2 points)

$W = \{(a-b, b-3a, 2a, a+2b)\}$

$= \{a(1,-3,2,1) + b(-1,1,0,2) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}\{(1,-3,2,1), (-1,1,0,2)\}$

qui est toujours un sous-espace.

On utilisera le test des sous-espaces

1) $(0,0,0,0) \in W$ si $a = b = 0$

2) $u = (a_1-b_1, b_1-3a_1, 2a_1, a_1+2b_1)$

$v = (a_2-b_2, b_2-3a_2, 2a_2, a_2+2b_2)$

$u+v = ((a_1+a_2)-(b_1+b_2), (b_1+b_2)-3(a_1+a_2), 2(a_1+a_2), (a_1+a_2)+2(b_1+b_2))$

$a = a_1+a_2$
$b = b_1+b_2 \Rightarrow = (a-b, b-3a, 2a, a+2b)$

3) $ku = (k(a_1-b_1), k(b_1-3a_1), k(2a_1), k(a_1+2b_1))$

$= (a_1k - b_1k, b_1k - 3ka_1, 2ka_1, ka_1+2kb_1)$

$a = a_1k$, $b = b_1k$

$= (a-b, b-3a, 2a, a+2b) \in W$

b) Donnez un ensemble de vecteurs qui engendre W. (2 points)

$\{(1,-3,2,1), (-1,1,0,2)\}$

c) En déduire une base pour W et donnez sa dimension. Justifiez pourquoi votre réponse est une base. (2 points)

$\{(1,-3,2,1), (-1,1,0,2)\}$ LI ?

$a(1,-3,2,1) + b(-1,1,0,2) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a-b&=0\\ -3a+b&=0\\ 2a&=0\\ a+2b&=0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow b=0, \ a=0$$

$\Rightarrow \boxed{a = b = 0, \text{ donc LI.}}$

Donc $\{(1,-3,2,1), (-1,1,0,2)\}$ est une base.

$\boxed{\dim W = 2}$

4. Dans $\mathbb{P}_2$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 et à coéfficients réels, soit

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(-1) = 0\}.$$

a) Vérifiez que U est fermé pour l'addition, ou bien exprimez U sous une forme qui montre que U est un sous-espace. (2 points)

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$.)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$. (3 points)

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b). (1 point)

(Justifiez vos réponses.)

a) Soit $p(x), q(x) \in U$

$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$. $\quad (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0+0 = 0$

$\therefore (p+q)(x) \in U$

$p(-1) = 0 \Rightarrow x-(-1) = x+1$ divise $p(x) \in \mathbb{P}_2(x)$

$\Rightarrow p(x) = (x+1)(ax+b)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

$= ax^2+bx+ax+b = a(x^2+x)+b(x+1)$

$\Rightarrow U = \text{vect}\{x^2+x, x+1\}$ qui est toujours un sous-espace.

---

b) $U = \text{vect}\{x^2+x, x+1\}$

$\{x^2+x, x+1\}$ LI?

$a(x^2+x)+b(x+1) = 0$

$ax^2+(a+b)x+b = 0$

$\Rightarrow a = 0 = b \quad \therefore$ LI.

donc, $\{x^2+x, x+1\}$ est une base de U.

$\dim U = 2$

c) Plusieurs réponses possibles. Par exemple, $\{-x^2-x, -x-1\}$

Toutes combinaisons linéaires de $\{x^2+x, x+1\}$ soit une bonne réponse.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1) + f(2) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est fermé pour l'addition, où $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ est l'espace vectoriel des fonctions. (1,5 points)

Soit $f, g \in X \implies f(1)+f(2)=0$

$g(1)+g(2)=0$

$(f+g)(1)+(f+g)(2) = f(1)+g(1)+f(2)+g(2) = f(1)+f(2)+g(1)+g(2)$

$= 0+0=0$

Donc, V est fermé pour l'addition.

RÉPONSE: Vrai.

b) Soit V est un espace vectoriel. Si $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendant dans V, alors pour tout vecteur $v_3 \notin \text{Vect}\{\text{v}_1, \text{v}_2\}$ l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est aussi linéairement indépendant dans V. (1,5 points)

Soit l'équation $av_1+bv_2+cv_3=0$

Si $c=0 \implies av_1+bv_2=0$

et on doit avoir $a=b=0$

car $\{v_1,v_2\}$ est LI

et la seule solution dans ce cas

est $a=b=c=0$. Donc LI.

Si $c \neq 0$

alors $av_1+bv_2+cv_3=0$

$cv_3 = -av_1-bv_2$

$v_3 = -\frac{a}{c}v_1 - \frac{b}{c}v_2$

$\implies v_3 \in \text{Vect}\{v_1,v_2\}$

qui est une ~~contradiction~~

Donc, $c=0$ et donc $a=b=c=0$

RÉPONSE: Vrai.

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} \mid a \geq 0 \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$. (1,5 points)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in$ de l'ensemble

$k = -1 \in \mathbb{R}$

$k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et $a < 0$

donc $k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin$ de l'ensemble.

RÉPONSE: Faux

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel V. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\{u_1 - u_3, u_2 + u_3, u_3\}$ est aussi linéairement indépendant. (1,5 points)

Soit l'équation $d(u_1 - u_3) + e(u_2 + u_3) + f(u_3) = 0$ pour $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Alors, $du_1 + eu_2 + (-d + e + f)u_3 = 0$

$\Rightarrow d = 0$
$e = 0$ car $\{u_1, u_3, u_2\}$ est LI
$-d + e + f = 0$

$\Rightarrow d = e = f = 0$ est la seule solution.

d'où $\{u_1 - u_3, u_2 + u_3, u_3\}$ est LI.

Vrai

6. [Bonus] Sachant que $V = \mathbb{R}^2$ muni des opérations non-standards suivantes:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2)$$

$$k \boxdot (x, y) = (kx - 2k + 2, ky)$$

est un espace vectoriel, trouvez l'inverse additive du vecteur (0,0) de $\mathbb{R}^2$ par rapport à ces opérations. (1 point)

Quel est l'élément qui joue le rôle de 0 dans V?

C'est-à-dire, si $(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1,y_1)$

$\Rightarrow (x_1+x_2-2, y_1+y_2) = (x_1,y_1)$

$\Rightarrow x_1+x_2-2 = x_1$, $y_1+y_2 = y_1$ $\Rightarrow x_2 = 2$, $y_2 = 0$ $\Rightarrow (2,0)$.

On cherche maintenant l'inverse additif de (0,0).

Donc on cherche (x_1,y_1) tel que $(x_1,y_1) \oplus (0,0) = (2,0)$

l'équivalent de 0 dans V.

$(x_1,y_1) \oplus (0,0) = (x_1-2, y_1) = (2,0)$

$\Rightarrow x_1 = 4$ et $y_1 = 0$

$\therefore$ L'inverse additif de (0,0) est (4,0).