# Mathématiques discrètes pour l'informatique
## MAT1748 Hiver 2019
## Devoir 2

Professeur : Mathieu Lemire

Solution

Nom : ______________________________

Numéro étudiant : ______________________________

Nom : ______________________________

Numéro étudiant : ______________________________

Nom : ______________________________

Numéro étudiant : ______________________________

Nom : ______________________________

Numéro étudiant : ______________________________

**Règles à suivre :**

- **Prière d'imprimer les pages du devoir (incluant cette page) et d'écrire vos solutions dans les espaces réservés.**
- Vous devez montrer vos démarches pour l'obtention de vos réponses finales.
- Aucune copies électronique ne sera acceptée. Seulement des copies en papiers.
- Votre travaille doit être écrit de facon lisible.
- Le devoir est sur un total de 30 points.
- **Prière d'agrapher votre devoir.**
- **IMPORTANT : Vous pouvez (mais vous n'êtes pas obligé) travailler sur ce devoir en équipe d'au maximum quatre personnes. Chaque équipe peut remettre une seule copie.**

**Date de remise :** Au plus tard le 6 mars à 15h00 (vous pouvez le remettre avant). À remettre dans la boite portant le numéro de notre cours au 207 Pavillon STEM.

1. Soient les intervalles $A = [0,3]$ et $B = [2,7)$ dans $\mathbb{R}$ (Ici, l'ensemble universel est $U = \mathbb{R}$). Déterminez :

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $\overline{A}$ d) $A \oplus B$ e) $A - B$ f) $B - A$

Écrivez vos réponses à l'aide d'intervalles et (si nécessaire) d'union d'intervalles. (6 points)

a) $[2,3]$

b) $[0,7)$

c) $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

d) $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
$= [0,2) \cup (3,7)$

e) $[0,2)$

f) $(3,7)$

2. Démontrez (sans utiliser le tableau des identités sur les ensembles) que $A \cup B \subseteq A$ si et seulement si $B \subseteq A \cap B$. (4 points)

$\Rightarrow$ : $A \cup B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \cap B$

Si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ (car $A \cup B \subseteq A$)

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\therefore$ $B \subseteq A \cap B$

$\Leftarrow$ : $B \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cup B \subseteq A$

Si $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$

Si $x \in A$ alors on a terminé

Si $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ (car $B \subseteq A \cap B$)

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore$ Dans tout les cas, $x \in A$ et donc $A \cup B \subseteq A$.

3. a) Utilisez le tableau des propriétés des ensembles pour démontrer que $\overline{(A \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} - C)} = C \cup (\overline{A} \cap B)$. Écrivez le numéro de la propriété que vous utilisez à chaque étape. (3 points)

$\overline{(A\cap\overline{C})\cup(\overline{B}-C)} = \overline{(A\cap\overline{C})}\cap\overline{(\overline{B}-C)}$ règle 17

$= \overline{(A\cap\overline{C})}\cap\overline{(\overline{B}\cap\overline{C})}$ règle 1

$= (\overline{A}\cup\overline{\overline{C}})\cap(\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{C}})$ règle 18

$= (\overline{A}\cup C)\cap(B\cup C)$ règle 10

$= (C\cup\overline{A})\cap(C\cup B)$ règle 12

$= C\cup(\overline{A}\cap B)$ règle 16

b) Même question que 3a mais pour $(A - C) \cup (B - C) = \overline{C} - (\overline{A} \cap \overline{B})$. (3 points)

$(A-C)\cup(B-C) = (A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})$ règle 1

$= (\overline{C}\cap A)\cup(\overline{C}\cap B)$ règle 12

$= \overline{C}\cap(A\cup B)$ règle 15

$= \overline{C}\cap\overline{\overline{(A\cup B)}}$ règle 10

$= \overline{C}-\overline{(A\cup B)}$ règle 1

$= \overline{C}-(\overline{A}\cap\overline{B})$ règle 17

4. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble universel $U$ fini. Pour chacune des propositions suivantes, déterminez si la proposition est vraie ou fausse. Si la proposition est fausse, donnez un contre-exemple. Si la proposition est vraie, donnez une démonstration.

a) $|A - B| = |A| - |B|$. (3 points)

b) Si $(A - B) \subseteq (B - A)$ alors $A \subseteq B$. (3 points)

a) Fausse. Par exemple, si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{1,4\}$

$A - B = \{2,3\}$ $\quad |A-B| = 2$

$|A| = 3$ $\quad$ et $|A| - |B| = 1 \neq |A-B|$

$|B| = 2$

b) Preuve par contradiction.

$A - B \subseteq B - A$ et $A \not\subseteq B$

$\Rightarrow$ il existe au moins un $x \in A$ tel que $x \notin B$.

$\Rightarrow$ $x \in A$ et $x \in \bar{B}$ $\Rightarrow$ $x \in A \cap \bar{B} = A - B$

mais, $x \notin B - A$ (car $x \notin B$)

Donc, $A - B \not\subseteq B - A$. Ce qui est une contradiction.

$\therefore (A-B) \subseteq (B-A) \Rightarrow A \subseteq B$.

5. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (5x + y, x - y)$.

a) Montrez que $f$ est injective. (4 points)

b) Montrez que $f$ est surjective. (4 points)

a) Si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (5x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (5x_2 + y_2, x_2 - y_2)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 5x_1 + y_1 = 5x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{array} \Rightarrow x_1 = x_2 - y_2 + y_1$

$\Rightarrow 5(x_2 - y_2 + y_1) + y_1 = 5x_2 + y_2$

$5x_2 - 5y_2 + 6y_1 = 5x_2 + y_2$

$\Rightarrow 6y_1 = 6y_2$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ ∴ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

$\Rightarrow x_1 = x_2$

b) Supposons que $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et qu'il existe $(x, y)$ tel que $f(x, y) = (a, b) \Rightarrow \begin{array}{l} 5x + y = a \\ x - y = b \end{array} \Rightarrow 6x = a + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{6}$

et $y = x - b = \frac{a+b}{6} - b = \frac{a+b-6b}{6} = \frac{a-5b}{6}$

Pour $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f\left(\frac{a+b}{6}, \frac{a-5b}{6}\right) = \left(5\left(\frac{a+b}{6}\right) + \frac{a-5b}{6}, \frac{a+b}{6} - \frac{a-5b}{6}\right)$

$= \left(\frac{5a+5b}{6} + \frac{a-5b}{6}, \frac{6b}{6}\right) = \left(\frac{6a}{6}, \frac{6b}{6}\right) = (a, b)$.