Examende partique II

MAT 1702

- **Question 1:**
  Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et soit B une matrice de type (2,4). Si la troisième ligne de $(AB)^T$ est $[-11]$, trouvez la troisième colonne de B.

  Solution: en classe...

- **Question 2:**

(1) Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que:

$$A^3 - A^2 + A + I_n = 0 \qquad (\star)$$

Montrez que A est inversible et trouvez son inverse.

solution:
On a de $(\star)$ que $A^2 - A^3 - A = I_n \Leftrightarrow A(A - A^2 - I_n) = (A - A^2 - I_n)A = I_n$. Donc, par définition, il exite une matrice $B = A - A^2 - I_n$ d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$, et d'où A est inversible avec inverse $A^{-1} = A - A^2 - I_n$.

(2) Résoudre pour la matrice X l'équation

$$A^{-1}(X^T)^{-1}C - CBA = \mathbf{0}\,,$$

où A, B, C et X sont des matrices inversibles d'ordre n.

Solution:
semblable à l'exercice fait en classe.

- **Question 3:**
  Parmis les énoncés suivants lesquels sont vrais pour une matrice **inversible** A d'ordre n:

  (1) Les lignes de A sont linéairement dépendantes.
  (2) L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une infinité de solutions pour un certain $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^n$.
  (3) A^T n'est pas inversible.
  (4) Si B est une matrice d'ordre n inversible, alors AB n'est pas inversible.
  (5) Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.

  Solution: Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
  Il y en a d'autres énnoncés (voir liste complète).

  Voici une question semblable:

  Soit A une matrice inversible d'ordre n. Le ou lesquels des énoncés suivants est ou sont vrais?

  (1) $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.
  (2) Les colonnes de A sont linéairement indépendant.
  (3) A^T est inversible.
  (4) Il existe un vecteur $\vec{b}$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$ est incompatible.
  (5) Aucun des énoncés précédents n'est vrai.

  Solution: 2 et 3.

- **Question 4:**

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}.$$

(a) Pour quelles valeurs de a et de b $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **dépendant**?

Solution: On considère la matrice $A = [\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}]$. On a A est équivalente par rapport aux lignes à $(L_3 \to L_3 + L_1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

Donc pour que ce système soit linéairement dépendant il faut que $a = -b$ (il faut avoir: # pivots $<$ # vecteurs).

(b) Pour $a = 1$, $b = -1$ donnez une relation de dépendance entre ces vecteurs.

Solution: On trouve la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc on a besoin de la M.E.R. de la matrice A. On a

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ M.E.R..$$

Donc la solution générale est

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_3 \text{ libre.}$$

Par exemple pour $x_3 = 1$ on a $x_1 = -2,\ x_2 = -1$ et donc la relation de dépendance

$$-2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}\,.$$

- **Question 5:**

Soit la matrice d'ordre 3 suivante: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) Calculez l'inverse A^{-1} de A, s'il existe.

Solution: On trouve la M.E.R. de $[A|I_3]$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) En utilisant l'inverse de A trouvé, résoudre l'équation matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solution: Comme A est inversible, de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ on a $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Question 6:**

Soien les matrices suivantes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Calculez

(a) BA

Solution: $BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) AB^T

Solution: $AB^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $D^TC - I_3$

Solution: On a $D^TC = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$ et donc $D^TC - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 6 & 12 & 17 \end{bmatrix}$

- **Question 7:**

  Supposons qu'on a une économie à deux secteurs; le secteur des fabriactions et le secteur des services. Pour chaque unité de sorite, les fabrications requièrent 3/5 unité des compagnies du même secteur et 1/5 de la part du secteur des services **et pour** chaque unité de sortie, les services consomment 1/5 unité de fabrications et 2/5 unité des services.

  (1) Rappellez l'équation de la production du modèle input-output de Leontief.
  (2) Donnez la matrice C des coéfficients techniques de cette économie.
  (3) Determinez les demandes intermédiaires si les fabrications prévoient produire 30 unités.
  (4) En utilisant l'**inverse** de la matrice $I_2 - C$, déterminez le niveau de production requis pour répondre à une demande finale de 10 unités des fabrications et 20 unités des services.