

Université d'Ottawa - Département de Mathématiques et Statistique
MAT 1720c - Calcul Différentiel & Intégral I
Professeur: Abdelkrim El basraoui
Examen de Pratique I

Question 1:

Résolvez les équations suivantes:

a)

$$2 \cos(3x) = 1, x \in [0, \pi/4].$$

On a

$$2 \cos(3x) = 1 \Leftrightarrow \cos(3x) = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Puis on trouve les valeurs de k pour lesquelles $x \in [0, \pi/4]$. On a

$$0 \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{-1}{6} \leq k \leq \frac{5}{24} \Rightarrow k = 0.$$

De meme, on a

$$0 \leq -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{13}{24} \Rightarrow$$

il n'existe pas de valeur entiere de k verifions cette inegalite.

D'où la seule solution est $x = \pi/9$ qui correspond a $k = 0$.

b)

$$\log_4(x + 1) + \log_4(x + 2) = \log_4(2x + 8).$$

Ne pas faire, c'est un exercice aux etudiants

Question 2:

La demi-vie du strontium-90, ^{90}Sr , est de 25 as. Donnez une formule $m(t)$ pour une masse de 24 mg après t années puis trouvez le temps (en logarithme naturel) nécessaire pour atteindre le quart de la masse initiale. **Ne pas faire car, déjà vu.**

Question 3:

Trouvez $f^{-1}(x)$ si

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

On résoud $y = f(x)$ pour x . On a

$$y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1 - y}{1 + y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right).$$

Donc

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right).$$

Question 4:

Considérez la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{|x + 4|}.$$

- a) Déterminez D_f . $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ 3cm
 b) Trouvez les asymptotes horizontales et verticales à $f(x)$, s'il y en a.

On calcule les limites à $\pm\infty$ et en $x = -4$. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty .$$

Donc il n'y a pas d'asymptotes horizontales.

Aussi on a

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} -x(x-1) = -20 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} x(x-1) = 20 .$$

Donc la aussi il n'y a pas d'asymptotes verticales. Notez que la fonction n'est pas continue en $x = -4$ car la limite n'existe pas.

- c) En déduire l'intervalle sur lequel f est continue.
 f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Question 5:

Pour quelles valeurs de a et b la fonction suivante est continue sur \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x > 1 \\ bx^2 + 2a & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} s'elle est continue en 1 et en 2. On doit donc avoir

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b + 2a = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4b + 2a = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4.$$

Donc on obtient $a = 2$ et $b = 0$.

Question 6:

Trouvez, en utilisant la définition de la dérivée, la dérivée de la fonction suivante en un point quelconque $x = a$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} .$$

Indication: utiliser au besoin les deux limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)/x = 0$$

On a en utilisant les limites fournies et les identités trigonométriques

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(a+h)} - \frac{1}{\cos(a)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a) - \cos(a+h)}{h(\cos(a+h)\cos(a))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a) - (\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h))}{h(\cos(a+h)\cos(a))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h\cos(a+h)} + \frac{\sin(a)\sin(h)}{h(\cos(a+h)\cos(a))} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(a+h)} + \sin(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(a+h)\cos(a)} \\ &= \frac{\sin(a)}{\cos^2(a)} . \end{aligned}$$

Question 7:

Calculez les limites suivantes: (l'utilisation de la règle de l'Hopital est absolument interdite)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{x}$$

Multiplier par le conjugué pour avoir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2}{x(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{2})} = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+2}} - \frac{2x}{\sqrt{x-2}} \right)$$

On met au même dénominateur puis on évalue

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+2}} - \frac{2x}{\sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x+2})}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)$$

puis on multiplie par le conjugué pour avoir

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(x-2-4(x+2))}{\sqrt{x^2-4}(\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+2})} \right) = -\infty.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1}$$

$-\infty$.

Question 8: Calculez les dérivées des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \frac{x^5 - 2x^{3/2} - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 3x^2 + x^{-3/2} + 2x^{-3}.$$

b) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x + 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

c) $f(x) = \sin(2e^x - 1)$

$$f'(x) = 2e^x \cos(2e^x - 1).$$