

# Calcul différentiel

Clémonell Bilayi-Biakana  
Département de Mathématiques et Statistique  
Université d'Ottawa

Mercredi, 29 Novembre 2017.





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonction

Continuité d'une  
fonction

Dérivabilité d'une  
fonction

- 1 Fonctions usuelles
- 2 Limite d'une fonction
- 3 Continuité d'une fonction
- 4 Dérivabilité d'une fonction





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

Apparu à la fin du *XVII*-ème siècle, le terme mathématique *fonction* doit son introduction en Analyse, au mathématicien Leibniz et son formalisme, aux mathématiciens: Jean Bernoulli, Euler et Fourier. Cette notion est familière. En effet, elle fait surface dès qu'une grandeur dépend d'une autre. Le diamètre d'un cercle par exemple dépend du rayon du cercle, car  $d = 2r$ . Ainsi, à chaque nombre positif  $r$ , correspond une valeur du diamètre  $d$ . On dit alors que le diamètre du cercle est une fonction du rayon  $r$ , du cercle.





## Définition

*Une fonction est une relation mathématique qui à tout élément  $x$  d'une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  associe un et un seul réel  $y$ .*

On la note:

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Cette relation mathématique est exprimée par l'équation:  $y = f(x)$ . Toute fonction est une relation. Cependant, toute relation n'est pas une fonction.





- Le réel  $x$  est appelé: **antécédent** de  $y$ . Il constitue la variable indépendante de  $y = f(x)$ .
- Le réel  $f(x)$ , aussi noté  $y$ , est appelé: **image** de  $x$  par  $f$ . C'est la variable dépendante de  $y = f(x)$ .

Une fonction  $f$  ne peut attribuer plus d'une valeur réelle  $y = f(x)$  à un antécédent  $x$ . À chaque antécédent correspond au plus une image.





## Théorème

Soient  $f$ ,  $g$  deux fonctions et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, les fonctions  $f \pm g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$ ,  $f/g$  sont respectivement définies comme suit:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ .
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ .
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ .

Toute fonction qui résulte de l'une de ces opérations est dite: **algébrique**.





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Définition

Étant données deux fonctions  $f$  et  $g$ , la fonction composée, notée  $g \circ f$  est définie par:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]. \quad (2)$$

Dans l'écriture  $g \circ f$ , la première fonction intervenant dans cette opération est  $f$ , la seconde est  $g$ . De plus, le symbole  $\circ$  est la loi ou l'opération permettant de composer des fonctions. Enfin, étant données deux fonctions,  $f$  et  $g$ , la composée  $f \circ g$  obéit à la même définition.





## Théorème

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions. Alors

- La loi de composition  $\circ$  n'est pas commutative, c'est-à-dire:

$$g \circ f \neq f \circ g. \quad (3)$$

- La loi de composition  $\circ$  est associative, c'est-à-dire:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \quad (4)$$

- La fonction identité  $id$  est l'élément neutre de la loi de composition  $\circ$ , c'est-à-dire:

$$f \circ id = id \circ f = f. \quad (5)$$





## Définition

*L'ensemble de définition  $E_f$ , d'une fonction  $f$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  existe, c'est-à-dire:*

$$E_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}. \quad (6)$$

En d'autres termes, l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs possibles que sa variable indépendante peut prendre.

On dit que  $f$  existe sur  $E_f$  ou  $f$  est définie sur  $E_f$  si  $E_f$  est son ensemble de définition.



# Ensemble de définition d'une fonction

## Ensemble de définition d'une fonction algébrique



### Théorème

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions respectivement définies sur  $E_f$  et  $E_g$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, les fonctions  $f \pm g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$ ,  $f/g$  ont respectivement pour ensembles de définition:

$$E_{f \pm g} = E_f \cap E_g$$

$$E_{\alpha f} = E_f$$

$$E_{fg} = E_f \cap E_g$$

$$E_{f/g} = \{x \in E_f \cap E_g : g(x) \neq 0\}.$$



# Ensemble de définition d'une fonction

## Ensemble de définition d'une fonction composée



### Théorème

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions respectivement définies sur  $E_f$  et  $E_g$ . Les fonctions  $g \circ f$  et  $f \circ g$  ont respectivement pour ensembles de définition:*

$$E_{g \circ f} = \{x \in E_f : f(x) \in E_g\}$$
$$E_{f \circ g} = \{x \in E_g : g(x) \in E_f\}.$$



# Ensemble de définition d'une fonction

## Fonctions composées usuelles



### Corollaire

*Si  $f$  est une fonction, alors la fonction*

$$x \mapsto |f(x)| \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{[f(x)]} \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a^{[f(x)]} \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}, (a > 0)$$

$$x \mapsto \ln[f(x)] \text{ existe si } f(x) > 0$$

$$x \mapsto \log_a[f(x)] \text{ existe si } f(x) > 0$$

$$x \mapsto [f(x)]^\alpha \text{ existe si } f(x) > 0, (\alpha \neq 0)$$

$$x \mapsto [f(x)]^\alpha \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}, (\alpha \in \mathbb{N})$$



# Ensemble de définition d'une fonction

## Fonctions composées usuelles



### Corollaire

*Si  $f$  est une fonction à variable réelle, alors*

$$x \mapsto \sqrt[p]{f(x)} \text{ existe si } f(x) \geq 0, \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$x \mapsto \sqrt[p]{f(x)} \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}, \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$x \mapsto \sin[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan[f(x)] \text{ existe si } f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x \mapsto \cot[f(x)] \text{ existe si } f(x) \neq k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x \mapsto \cosh[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sinh[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tanh[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$



# Ensemble de définition d'une fonction

## Fonctions composées usuelles



### Corollaire

*Si  $f$  est une fonction à variable réelle, alors*

$$x \mapsto \text{Arcsin}[f(x)] \text{ existe si } -1 \leq f(x) \leq 1$$

$$x \mapsto \text{Arccos}[f(x)] \text{ existe si } -1 \leq f(x) \leq 1$$

$$x \mapsto \text{Arctan}[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{Arccot}[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{Argsinh}[f(x)] \text{ existe si } f(x) \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{Argcosh}[f(x)] \text{ existe si } f(x) > 1$$

$$x \mapsto \text{Argtanh}[f(x)] \text{ existe si } -1 < f(x) < 1.$$



# Ensemble de définition d'une fonction

## Égalité de deux fonctions



### Théorème

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $E_f$  et  $E_g$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont égales et on écrit  $f = g$  si*

$$\begin{cases} E_f = E_g \\ \forall x \in E_f, f(x) = g(x). \end{cases} \quad (7)$$





## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ . La courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est l'ensemble des points  $M(x, f(x))$  du plan tels que  $x \in E_f$ , c'est-à-dire:

$$C_f = \{(x, f(x)) : x \in E_f\} \quad (8)$$

La relation mathématique  $y = f(x)$  régit l'équation cartésienne dans le plan de la courbe représentative de la courbe de la fonction  $f$ .





## Théorème (Test de la droite verticale)

*Une courbe du plan ( $Oxy$ ) est la courbe représentative d'une fonction  $f$  si et seulement si aucune droite verticale  $(D) : x = a, a \in \mathbb{R}$ , ne l'intersecte plus d'une fois.*

## Définition (Parité)

*Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ .*

- *On dit que la fonction  $f$  est paire si*

$$\begin{cases} x \in E_f \Leftrightarrow -x \in E_f \\ \forall x \in E_f, f(-x) = f(x). \end{cases} \quad (9)$$

- *On dit que la fonction  $f$  est impaire si*

$$\begin{cases} x \in E_f \Leftrightarrow -x \in E_f \\ \forall x \in E_f, f(-x) = -f(x). \end{cases} \quad (10)$$



# Courbe représentative d'une fonction

## Parité



Les fonctions  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto \cosh x$ ,  $x \mapsto \cos x$ , etc, sont paires tandis que les fonctions  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \tan x$ ,  $x \mapsto \tanh x$ , etc, sont impaires.

### Remarques:

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ .

- La symétrie de l'ensemble de définition  $E_f$ , par rapport à  $O(0,0)$  est la condition nécessaire de la parité d'une fonction  $f$ , i.e :

$$x \in E_f \Leftrightarrow -x \in E_f.$$

- Il est suffisant d' étudier une fonction  $f$ , paire ou impaire sur:

$$E_f \cap [0, \infty[. \quad (11)$$



# Courbe représentative d'une fonction

## Parité



### Remarques:

- La courbe représentative d'une fonction paire  $f$  est symétrique par rapport à l'axe  $(Oy)$  du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . En pratique, elle s'obtient en complétant sa courbe représentative sur sa restriction  $E_f \cap [0, \infty[$  par symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .
- La courbe représentative d'une fonction impaire  $f$  est symétrique par rapport à l'origine  $O(0,0)$  du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . En pratique, elle s'obtient en complétant sa courbe représentative sur sa restriction  $E_f \cap [0, \infty[$  par symétrie par rapport à l'origine  $O(0,0)$ .
- Une fonction peut être ni paire, ni impaire et par conséquent n'admet ni axe de symétrie  $(Oy)$ , ni centre de symétrie  $O(0,0)$ .



# Courbe représentative d'une fonction

## Centre de symétrie



### Définition

Le point  $I(a, b)$  est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  si

$$\begin{cases} a + x \in E_f \Leftrightarrow a - x \in E_f \\ \forall x \in E_f, f(a + x) + f(a - x) = 2b. \end{cases} \quad (12)$$

La courbe représentative d'une fonction  $f$  admettant  $I(a, b)$  comme centre de symétrie s'obtient en complétant sa courbe représentative sur sa restriction  $E_f \cap [a, \infty[$  par symétrie par rapport à ce point.



# Courbe représentative d'une fonction

## Axe de symétrie



### Définition

*La droite d'équation  $x = a$  est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  si*

$$\begin{cases} a + x \in E_f \Leftrightarrow a - x \in E_f \\ \forall x \in E_f, f(a + x) = f(a - x). \end{cases} \quad (13)$$

La courbe représentative d'une fonction  $f$  admettant  $x = a$  comme axe de symétrie s'obtient en complétant sa courbe représentative sur sa restriction  $E_f \cap [a, \infty[$  par symétrie par rapport à cet axe.



**Remarques:**

- La condition nécessaire pour qu'une fonction  $f$  admette un axe ou un centre de symétrie est que son ensemble de définition  $E_f$  soit symétrique par rapport au point  $a \in \mathbb{R}$ . Cette symétrie de  $E_f$  est traduite par l'équivalence:

$$a + x \in E_f \Leftrightarrow a - x \in E_f.$$

- L'étude d'une fonction admettant soit un axe de symétrie  $x = a$  soit un centre de symétrie  $I(a, b)$  peut se restreindre sur l'intervalle:

$$E_f \cap [a, \infty[. \quad (14)$$



# Courbe représentative d'une fonction

## Périodicité



### Définition

*Une fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  ou  $T$ -périodique s'il existe un nombre  $T$  positif tel que:*

$$\begin{cases} x \in E_f \Leftrightarrow x + T \in E_f \\ \forall x \in E_f, f(x + T) = f(x) \end{cases} \quad (15)$$

### Théorème

*Soient  $f$  une fonction définie sur  $E_f$  et  $k$  un entier naturel non nul. Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors  $f$  est aussi  $kT$ -périodique.*



# Courbe représentative d'une fonction

## Périodicité



### Remarques:

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ .

- Il est suffisant d'étudier une fonction  $f$ ,  $T$ -périodique sur:

$$E_f \cap [\alpha, \alpha + T[, \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (16)$$

- La courbe représentative d'une fonction  $T$ -périodique,  $f$  s'obtient en complétant sa courbe représentative sur sa restriction  $E_f \cap [\alpha, \alpha + T[$  par les arcs de courbe qui se déduisent par translations de vecteur  $k\vec{V}$ , où  $k \in \mathbb{R}$  et  $\vec{V}(T, 0)$ .



# Courbe représentative d'une fonction

## Abscisses à l'origine - Ordonnées à l'origine



### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ .

- Une abscisse à l'origine de  $f$  est un point où le graphe de  $f$  coupe l'axe des  $x$ . L'ensemble de ces points est:

$$\mathcal{C}_f \cap (Ox) := \{x \in E_f : f(x) = 0\} \quad (17)$$

- Une ordonnée à l'origine de  $f$  est un point où le graphe de  $f$  coupe l'axe des  $y$ . L'ensemble de ces points est:

$$\mathcal{C}_f \cap (Oy) := \{x \in E_f : x = 0\} \quad (18)$$

Etudier les éventuelles abscisses et ordonnées à l'origine de:

$$f(x) = |x - 3| - 4.$$



# Courbe représentative d'une fonction

## Transformations de graphes



- **Translations:**

- Le graphe de  $x \mapsto f(x - a)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *translation horizontale* de  $a$  unités vers la droite.
- Le graphe de  $x \mapsto f(x + a)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *translation horizontale* de  $a$  unités vers la gauche.
- Le graphe de  $x \mapsto f(x) + a$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *translation verticale* de  $a$  unités vers le haut.
- Le graphe de  $x \mapsto f(x) - a$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *translation verticale* de  $a$  unités vers le bas.



# Courbe représentative d'une fonction

## Transformations de graphes



- **Réflexions:**

- Le graphe de  $x \mapsto -f(x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *réflexion par rapport à l'axe des  $x$* .
- Le graphe de  $x \mapsto f(-x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  une *réflexion par rapport à l'axe des  $y$* .



# Courbe représentative d'une fonction

## Transformations de graphes



- **Étirements (Élongations):**

- Si  $0 < c < 1$ , le graphe de  $x \mapsto f(cx)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  un *agrandissement horizontal* de rapport  $1/c$ .
- Si  $c > 1$ , le graphe de  $x \mapsto f(cx)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  un *rétrécissement horizontal* de rapport  $1/c$ .
- Si  $0 < c < 1$ , le graphe de  $x \mapsto cf(x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  un *rétrécissement vertical* de rapport  $c$ .
- Si  $c > 1$ , le graphe de  $x \mapsto cf(x)$  est obtenu en faisant subir à celui de  $x \mapsto f(x)$  un *agrandissement vertical* de rapport  $c$ .



# Fonctions usuelles

## Fonctions polynômes



### Définition

*Une fonction polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  est une fonction  $p$*

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (19)$$

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

*où  $a_i \in \mathbb{R}$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $a_n \neq 0$ . Ces constantes sont appelées: coefficient de la fonction polynôme.*





## Théorème (Théorème de factorisation)

*Soit  $p$  une fonction polynôme telle que :  $p(r) = 0$ , alors  $x - r$  est un facteur de  $p$ . De plus,  $r$  est une racine de  $p$ .*

Ce théorème peut s'avérer utile pour factoriser les polynômes de degré trois ou plus.

Factoriser la fonction polynôme suivante:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 6.$$





### Définition

*Une fonction rationnelle est une fonction  $f$  de la forme:*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (20)$$

*où  $x \mapsto p(x)$ ,  $x \mapsto q(x)$  sont des fonctions polynômes. De plus, le polynôme est tel que:  $q(x) \neq 0$ .*

*Toute fonction rationnelle est algébrique.*



# Fonctions usuelles

## Fonctions exponentielles



### Définition

*Une fonction exponentielle de base  $a$  est une fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned} \tag{21}$$

*où  $a$  est un réel strictement positif.*

- Si  $0 < a < 1$ , alors  $x \mapsto a^x$  est décroissante.
- Si  $a = 1$ , alors  $x \mapsto a^x$  est constante.
- Si  $a > 1$ , alors  $x \mapsto a^x$  est croissante.



**Remarques:**

Il est notoire que le graphe de  $x \mapsto a^x$  passe toujours par le point  $(0, 1)$ . En outre, la manière dont le graphe de  $x \mapsto a^x$  coupe l'axe des ordonnées détermine le choix de la base optimale  $a$ . En effet, en considérant par exemple les pentes des tangentes des fonctions  $x \mapsto 2^x$  et  $x \mapsto 3^x$  au point  $(0, 1)$ , il vient qu'elles valent respectivement  $m_1 = 0,7$  et  $m_2 = 1,1$ . Puisque les valeurs de ces pentes sont toutes proches de l'unité, il est intuitif de penser que la base  $a$  pour laquelle la pente de la tangente en  $(0, 1)$  vaut exactement 1 est la base  $a = e$ , où  $e = 2,718$  est le **nombre d'Euler**.



Enfin, une fonction exponentielle de base  $e$  est la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x. \end{aligned} \quad (22)$$

Elle s'appelle: **fonction exponentielle naturelle**.

### Théorème

Soient  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs et  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\begin{aligned} a^x &> 0 \\ a^x a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ a^x = a^y &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques



### Définition

- *La fonction sinus hyperbolique est la fonction:*

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & (23) \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

- *La fonction cosinus hyperbolique est la fonction:*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (24)$$





## Définition

- *La fonction tangente hyperbolique est la fonction:*

$$\begin{aligned} \tan h : \mathbb{R} &\longrightarrow ]-1, 1[ & (25) \\ x &\longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}. \end{aligned}$$

- *La fonction cotangente hyperbolique est la fonction:*

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (26)$$





## Définition

- *La fonction sécante hyperbolique est la fonction  $\operatorname{sech}$  définie par:*

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}. \quad (27)$$

- *La fonction cscante hyperbolique est la fonction  $\operatorname{csch}$  définie par:*

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}. \quad (28)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

### Théorème (Relations avec l'exponentiel)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$





# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques

### Théorème (Relation fondamentale)

$\forall x \in \mathbb{R}$ , on a:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Il résulte de cette formule, les identités suivantes:

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$1 - \operatorname{coth}^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

### Théorème (Formules d'addition)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\tanh(x - y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$




 $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a:}$ 

- **Formules de duplication**

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$= 2 \cosh^2 x - 1$$

$$= 1 + 2 \sinh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

- **Formules de linéarisation**

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tanh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques



### Théorème (Formules de factorisation)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \left( \frac{x+y}{2} \right) \sinh \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \left( \frac{x+y}{2} \right) \cosh \left( \frac{x-y}{2} \right)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions hyperboliques



### Théorème (Symétrie)

$\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\coth(-x) = -\coth x$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Définition

- *La fonction sinus est la fonction:*

$$\begin{aligned}\sin : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] & (29) \\ x &\longmapsto \sin x\end{aligned}$$

- *La fonction cosinus est la fonction:*

$$\begin{aligned}\cos : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] & (30) \\ x &\longmapsto \cos x\end{aligned}$$





## Définition

- *La fonction tangente est la fonction:*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (31)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (32)$$





## Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonction

Continuité d'une  
fonction

Dérivabilité d'une  
fonction

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Angles opposés)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Angles supplémentaires)

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cot(\pi - x) = -\cot x$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Angles antisupplémentaires)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cot(\pi + x) = \cot x$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Angles complémentaires)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$





Calcul différentiel

Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonction

Continuité d'une  
fonction

Dérivabilité d'une  
fonction

# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques

### Théorème (Angles anticomplémentaires)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$$



uOttawa

# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Principes d'équivalence)

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -a + 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

En particulier, on a:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$





# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques

### Théorème (Relation fondamentale)

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Il résulte de cette identité que:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x.$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

### Théorème (Formules d'addition)

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Formules de duplication)

$$\sin 2x = \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 1 - \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Formules de linéarisation)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Ces formules sont aussi appelées: formules de Carnot.



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



### Théorème (Formules de factorisation)

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))\end{aligned}$$

Ces formules sont aussi appelées: formules de Simpson.



# Fonctions usuelles

## Fonctions trigonométriques



Par conséquent, on a:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions raccordées



### Définition

*Une fonction raccordée est une fonction dont la règle de correspondance diffère selon les valeurs de la variable indépendante.*

Les fonctions suivantes illustrent une fonction raccordée.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions logarithmes



### Définition

*Une fonction logarithme de base  $a$  est une fonction*

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x. \end{aligned} \quad (33)$$

*où  $a$  est un réel strictement positif tel que  $a \neq 1$ .*

En particulier, une fonction logarithme de base  $e$  s'appelle : **fonction logarithme naturelle**. Elle est notée:  $\ln$ , i.e:

$$\log_e x : = \ln x \quad (34)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (35)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions logarithmes



### Théorème (Propriétés)

$\forall x, y, a > 0$ , on a :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions puissances



### Définition

*Une fonction puissance est une fonction  $f$  de la forme:*

$$f(x) = x^a, \quad (a \in \mathbb{R}). \quad (36)$$

- Si  $a < 0$ , alors  $x \mapsto x^a$  est décroissante.
- Si  $a = 0$ , alors  $x \mapsto x^a$  est constante.
- Si  $a > 0$ , alors  $x \mapsto x^a$  est croissante.

La relation suivante lie les fonctions: puissance, exponentielle et logarithme.

$$x^a = e^{a \ln x} \quad (37)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions puissances



Supposons que  $n \in \mathbb{N}^*$ . On distingue les cas suivants:

- Si  $a = -n$ , alors  $f$  est une fonction rationnelle.
- Si  $a = n$ , alors  $f$  est une fonction monôme de degré  $n$ .  
Le graphe d'une telle fonction monôme dépend de la parité de l'entier  $n$ .
- Si  $a = \frac{1}{n}$ , alors  $f$  est une **fonction racine**  $n^{\text{ième}}$ . Elle est définie par:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}. \quad (38)$$



# Fonctions usuelles

## Fonctions puissances



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

**Rappels:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|$$

$$\sqrt[2p+1]{a^{2p+1}} = a$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur  $E_f$  et  $I$ , un intervalle tel que:  $I \subset E_f \subseteq \mathbb{R}$ . On appelle restriction de  $f$  à  $I$  la fonction:

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad (39)$$

La restriction de  $f$  à  $I$ ,  $g$ , est aussi notée:  $f|_I$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ .

La fonction  $g$  définie sur  $]1, +\infty[$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  est la restriction de  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ . L'image  $Imf$  de  $f$  est l'ensemble de toutes les valeurs  $f(x)$  associées à tous les réels  $x$  de l'ensemble de définition, c'est-à-dire:

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E_f; y = f(x)\} \quad (40)$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto \sin x$  ont pour image  $[-1, 1]$ .

La fonction  $x \mapsto \tan x$  a pour image  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto e^x$  a pour image  $\mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $x \mapsto \ln x$  a pour image  $\mathbb{R}$ , etc.





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Définition (Injection)

*Une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  est injective si*

$$\forall x, y \in E_f, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y). \quad (41)$$

## Théorème

*Une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  est injective si et seulement si*

$$\forall x, y \in E_f, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y. \quad (42)$$





## Théorème (Test de la droite horizontale)

*Une fonction est injective si et seulement si aucune droite horizontale ne coupe son graphe plus d'une fois.*

## Définition (Surjection)

*Soient  $I, J \subset \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite surjective si*

$$\forall y \in J, \exists x \in I : y = f(x). \quad (43)$$

## Définition (Bijection)

*Soient  $I, J \subset \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite bijective si*

$$\forall y \in J, \exists! x \in I : y = f(x). \quad (44)$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Théorème

*Soient  $I, J \subset \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow J$ . Si  $f$  est injective et surjective, alors  $f$  est bijective.*

## Théorème

*Soient  $I, J \subset \mathbb{R}$ . Si  $f : I \rightarrow J$  est une fonction bijective, alors  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  définie par:*

$$\forall y \in J, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y. \quad (45)$$



# Notion de bijection

## Bijections usuelles

### Théorème (Formules de réciprocity)

*Si  $f : I \rightarrow J$  est une fonction bijective, alors*

$$\begin{cases} f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id \\ \forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x \\ \forall x \in J, f \circ f^{-1}(x) = x. \end{cases} \quad (46)$$

- $x \mapsto \ln x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \exp x \end{aligned}$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x.$$



# Bijections usuelles

## Fonctions hyperboliques inverses



- $x \mapsto \cosh x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arg cosinus hyperbolique** ci-dessous:

$$\begin{aligned} \arg \cosh : [1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\cosh(\arg \cosh x) = x$$

$$\arg \cosh(\cosh x) = x$$

$$y = \cosh x \Leftrightarrow x = \arg \cosh y$$



# Bijections usuelles

## Fonctions hyperboliques inverses



- $x \mapsto \sinh x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arg sinus hyperbolique** ci-dessous:

$$\begin{aligned}\arg \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right)\end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\sinh(\arg \sinh x) = x$$

$$\arg \sinh(\sinh x) = x$$

$$y = \sinh x \Leftrightarrow x = \arg \sinh y$$



# Bijections usuelles

## Fonctions hyperboliques inverses



- $x \mapsto \tanh x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arg tangente hyperbolique** ci-dessous:

$$\begin{aligned} \arg \tanh : ]-1, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\tanh(\arg \tanh x) = x$$

$$\arg \tanh(\tanh x) = x$$

$$y = \tanh x \Leftrightarrow x = \arg \tanh y$$



# Bijections usuelles

## Fonctions trigonométriques inverses



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

- $x \mapsto \cos x$  réalise une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arc cosinus** ci-dessous:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x \\ \arccos(\cos x) &= x \\ y = \cos x &\Leftrightarrow x = \arccos y \end{aligned}$$



# Bijections usuelles

## Fonctions trigonométriques inverses



Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

- $x \mapsto \sin x$  réalise une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ .  
Sa bijection réciproque est la fonction **arc sinus**  
ci-dessous:

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin x \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x \\ \arcsin(\sin x) &= x \\ y = \sin x &\Leftrightarrow x = \arcsin y \end{aligned}$$



# Bijections usuelles

## Fonctions trigonométriques inverses



- $x \mapsto \tan x$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arc tangente** ci-dessous:

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y.$$



# Bijections usuelles

## Fonctions trigonométriques inverses



- $x \mapsto \cot x$  réalise une bijection de  $]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est la fonction **arc cotangente** ci-dessous:

$$\begin{aligned} \text{arc cot} : \mathbb{R} &\longrightarrow ]0, \pi[ \\ x &\longmapsto \text{arc cot } x \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned} \cot(\text{arc cot } x) &= x \\ \text{arc cot}(\cot x) &= x \\ y = \cot x &\Leftrightarrow x = \text{arc cot } y. \end{aligned}$$





## Définition

*Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ , sauf peut-être en  $a$ . On dit que  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  lorsque  $x$  tend vers le point  $a$  et on écrit:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad (47)$$

*si  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0: |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$ .*

*Autrement dit,  $f(x)$  devient aussi proche de  $\ell$  indépendamment de la manière dont  $x$  s'approche de  $a$ .*





- Si (47) est satisfaite, alors on dit que la limite de la fonction  $f$  **existe** au voisinage de  $a$ . Au cas contraire, on dit qu'elle **n'existe pas**.
- Une fonction  $f$  peut admettre une limite en  $a \in \mathbb{R}$  sans être définie en  $a$ . En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

bien que  $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  ne soit pas définie en 0.



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche



### Définition

*Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la limite de  $f$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche, est égale à  $\ell$  et on écrit*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \quad (48)$$

*si quelle que soit la manière dont  $x$  s'approche de  $a$  tout en étant plus petit que  $a$ ,  $f(x)$  devient aussi proche de  $\ell$ .*



# Limite d'une fonction

## Limite à droite



### Définition

*Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la limite de  $f$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite, est égale à  $\ell$  et on écrit*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad (49)$$

*si quelle que soit la manière dont  $x$  s'approche de  $a$  tout en étant plus grand que  $a$ ,  $f(x)$  devient aussi proche de  $\ell$ .*



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche - Limite à droite



### Remarque:

Les notations  $x \rightarrow a^-$  et  $x \rightarrow a^+$  renseignent sur la manière dont la variable indépendante  $x$  s'approche de  $a$ . En effet, voici ce qu'elles signifient:

$$\begin{cases} x \rightarrow a^- \iff x \rightarrow a \text{ et } x < a \\ x \rightarrow a^+ \iff x \rightarrow a \text{ et } x > a. \end{cases} \quad (50)$$



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche - Limite à droite



### Théorème (Existence de la limite d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell. \quad (51)$$

- Étudier l'existence de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$





## Théorème (Limites de fonctions algébriques)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ . Alors,

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \pm \ell'$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \ell, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = \ell \ell'$ ,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\ell}{\ell'},$  si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche - Limite à droite



### Remarques:

- Il résulte de ces propriétés que le passage à la limite des fonctions est compatible aux opérations algébriques.
- Ces propriétés demeurent valables aussi bien pour les limites à droite et à gauche que pour les limites au voisinage de l'infini ( $\pm\infty$ ) bien que nous n'en parlons encore.



# Limite d'une fonction

## Composition des limites



### Théorème

Si  $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f, g$  sont deux fonctions telles que:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = c \quad (52)$$



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche - Limite à droite



### Rappels:

- Si  $k \in \mathbb{R}$ , alors

$$k \pm \infty = \pm\infty, \quad k \times \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{k} = \infty, \quad \frac{k}{\infty} = 0.$$

- Outre ces formes, il existe bien d'autres connues sous le vocable: **formes indéterminées**. En voici quelques unes:

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \text{etc.}$$



# Limite d'une fonction

## Exercices d'application:



Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 - x - 2}$$



# Limite d'une fonction

## Limite à gauche - Limite à droite



### Théorème (Théorème des gendarmes)

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  des fonctions définies telles qu' au voisinage d'un point  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \quad (54)$$

alors la limite de  $g$  existe et vaut  $\ell$ , c'est-à-dire:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell. \quad (55)$$

Ce théorème est aussi connu sous d'autres vocables notamment: *théorème du sandwich*, *théorème d'encadrement*.



# Limite d'une fonction

## Asymptotes - Branches infinies



L'étude des branches infinies consiste à examiner le comportement d'une fonction  $f$  au voisinage de l'infini ( $\pm\infty$ ).

### Définition

Soient  $f$  une fonction et  $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

- ① La droite  $x = a$ , est une **asymptote verticale** de la courbe de  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty. \quad (56)$$

- ② La droite  $y = b$ , est une **asymptote horizontale** de la courbe de  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b. \quad (57)$$



# Limite d'une fonction

## Asymptotes - Branches infinies



- Si  $b = \pm\infty$  dans (57), c'est-à-dire:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty. \quad (58)$$

alors  $f$  n'admet pas d'asymptote horizontale. Intuitivement,  $f$  croît lorsque  $x$  croît ou  $f$  décroît lorsque  $x$  croît, etc. Mais à quelle vitesse cette croissance ou décroissance de  $f$  se fait-elle? Croît-elle ou décroît-elle plus vite, moins vite que  $x$ ? Pour répondre à cette question, on examine la limite ci-dessous:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (59)$$



# Limite d'une fonction

## Asymptotes - Branches infinies



- La droite  $y = \alpha x + \beta$ , est une **asymptote oblique** à la courbe de  $f$  si

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha, (\alpha \neq 0) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta. \end{cases} \quad (60)$$

La vitesse de croissance ou de décroissance de  $f$  est comparable à celle de  $\alpha x$  lorsque  $x$  croît ou décroît.

- La courbe de  $f$  admet une **branche parabolique** d'axe  $y = \alpha x$  si

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha, (\alpha \neq 0) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \pm\infty. \end{cases} \quad (61)$$



# Limite d'une fonction

## Asymptotes - Branches infinies



- La courbe de  $f$  admet une **branche parabolique d'axe** ( $Ox$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (62)$$

La fonction  $f$  croît moins vite que  $x$  au voisinage de  $\pm\infty$ .

- La courbe de  $f$  admet une **branche parabolique d'axe** ( $Oy$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \quad (63)$$

La fonction  $f$  croît ou décroît plus vite que  $x$  au voisinage de  $\pm\infty$ .



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonction exponentielle)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} = 1$$



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonctions hyperboliques)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonctions hyperboliques)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{e^x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonction logarithme)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{\alpha x} = 1$$



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonctions puissances)

Pour tout  $b > 1$  et tout  $a > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^x}{x^a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^a} = 0.$$

Ce résultat est connu sous le nom de croissance comparée. Il stipule qu'au voisinage de  $+\infty$ , la fonction exponentielle croît plus vite que la fonction puissance. La fonction puissance quant à elle croît plus vite que la fonction logarithme.



# Limite d'une fonction

## Limites classiques



### Proposition (Fonctions trigonométriques)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x = -\frac{\pi}{2}$$



# Continuité d'une fonction

## Continuité d'une fonction en un point



### Définition

Une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  est continue au point  $a \in E_f$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (64)$$

Il résulte de cette définition que la continuité d'une fonction en un point exige que:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \end{cases} \quad (65)$$

On dit que  $f$  est **discontinue** au point  $x = a$  si  $f$  n'est pas continue au point  $x = a$ .



# Continuité d'une fonction

## Continuité à gauche - Continuité à droite



### Définition

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ , sauf peut-être en  $a$ .

- $f$  est dite continue à droite en  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a). \quad (66)$$

- $f$  est dite continue à gauche en  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a). \quad (67)$$



# Continuité d'une fonction

## Continuité d'une fonction en un point



Le théorème suivant, fondé sur les propriétés des limites, permet de déterminer la continuité d'une fonction algébrique en un point.

### Théorème

Soient  $f$ ,  $g$  deux fonctions continues en  $a \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $f \pm g$  est continue en  $a$ ,
- $\alpha f$  est continue en  $a$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $fg$  est continue en  $a$ ,
- $f/g$  est continue en  $a$ , si  $g(a) \neq 0$ .



# Continuité d'une fonction

## Continuité d'une fonction en un point



Le théorème suivant porte sur la continuité d'une fonction composée en un point.

### Théorème

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Si  $f \circ g$  est définie sur un intervalle contenant  $a \in \mathbb{R}$  et si  $f$  est continue en  $b \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b). \quad (68)$$

En particulier, si  $g$  est continue en  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $b = g(a)$ .  
Ainsi,  $f \circ g$  est continue en  $a$ , c'est-à-dire:

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f \circ g(a). \quad (69)$$



# Continuité d'une fonction

## Continuité sur un intervalle



### Définition

*Soit  $I$  un intervalle. Une fonction  $f$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de cet intervalle.*

### Théorème (Continuité des fonctions algébriques)

*Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,*

- $f \pm g$  est continue sur  $I$ ,
- $\alpha f$  est continue sur  $I$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $fg$  est continue sur  $I$ ,
- $f/g$  est continue, si  $g \neq 0$  sur  $I$ .



# Continuité d'une fonction

## Continuité sur un intervalle



### Théorème (Continuité des fonctions composées)

*Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et si la fonction composée  $f \circ g$  est définie sur un intervalle  $I$ , alors  $f \circ g$  est continue sur  $I$ .*

### Théorème (Continuité des fonctions usuelles)

*Les fonctions: polynôme, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, trigonométrique inverse, exponentielle, logarithme, hyperbolique, hyperbolique inverse sont toutes continues sur leur ensemble de définition.*



# Continuité d'une fonction

## Continuité sur un intervalle



### Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors, pour tout réel  $u \in ]f(a), f(b)[$ , il existe au moins un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = u$ , i.e,

$$\forall u \in ]f(a), f(b)[, \exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(c) = u. \quad (70)$$

### Corollaire (Théorème de Bolzano)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . Si  $f(a)f(b) \leq 0$ , alors il existe au moins un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ , i.e,

$$f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(c) = 0. \quad (71)$$



## Dérivabilité d'une fonction

### Taux moyen de variation - Taux de variation instantané



Soit  $f$  une fonction d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

- L'**incrément** de  $x$  est la variation de  $x$  d'un point  $x_1 = a$  à un point  $x_2 = a + h$ . Il est défini par:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h. \quad (72)$$

- La correspondante variation en  $y$ , aussi appelée **variation totale** de  $y$ , est définie par:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(a + h) - f(a). \quad (73)$$



# Dérivabilité d'une fonction

## Taux moyen de variation - Taux de variation instantané



- Le **taux moyen de variation** de  $y$  par rapport à  $x$  sur l'intervalle  $I = [x_1, x_2] = [a, a + h]$  est défini par:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (74)$$

La variation totale de la fonction  $f$  ne doit pas être confondue à son taux moyen de variation. **Le taux moyen de variation indique comment (à quelle vitesse) la fonction  $f$  varie entre les extrémités d'un intervalle  $[a, a + h]$ .**





- Le **taux de variation instantané** de  $y$  par rapport à  $x$  est défini par:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} && (75) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.\end{aligned}$$

Le **taux de variation instantané** de  $y$  par rapport à  $x$  représente la pente de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a, f(a))$ .



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Définition de la dérivée



### Définition

Une fonction  $f$  définie sur  $E_f$  est dérivable en  $a \in E_f$  si:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (76)$$

*pourvu que cette limite existe. En posant  $x = a + h$ , (76) devient:*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (77)$$

*Si  $f$  est dérivable en  $a \in E_f$ , alors la limite  $f'(a)$  est appelée:*  
**dérivée de  $f$  au point  $a \in E_f$ .**



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Définition de la dérivée



- Il s'ensuit que (77) est une définition équivalente de la dérivée d'une fonction en un point.
- Par conséquent, (76) et (77) montrent que **la dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $a$  est un taux de variation instantané de  $f$  au point  $a$** . D'une manière équivalente, on peut considérer **la dérivée d'une fonction en un point comme étant la pente de la droite tangente en ce point**.
- Le réel  $f'(a)$  est appelé: **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ .
- Si  $f'(a) = 0$ , alors la tangente à la courbe de  $f$  en ce point est horizontale.
- Si  $f'(a) = \pm\infty$ , alors la tangente à la courbe de  $f$  en ce point est verticale.



# Dérivabilité d'une fonction

## Dérivabilité à gauche - Dérivabilité à droite



### Définition

Soit  $f$  une fonction définie au point  $a$ .

- $f$  est dite dérivable à droite en  $x = a$  si

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (78)$$

*pourvu que cette limite à droite existe.*

- $f$  est dite dérivable à gauche en  $x = a$  si

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (79)$$

*pourvu que cette limite à gauche existe.*



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Définition de la dérivée



- Il s'ensuit que  $f$  est dérivable en  $a \in E_f$  si  $f$  est dérivable à gauche et à droite de  $a$ . De plus,

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a).$$

- Bien que  $x \mapsto |x|$  soit bien définie en 0, elle n'est pas dérivable en ce point.
- Bien que  $x \mapsto \sqrt{(x-2)^3}$  soit dérivable à droite en 2, elle n'est pas dérivable en 2.
- Si  $y = f(x)$ , alors l'une des notations ci-dessous peut être utilisée pour désigner la dérivée de  $f$  au point  $x = a$ :

$$f'(a), y'|_{x=a}, \frac{dy}{dx}|_{x=a}, \frac{df}{dx}|_{x=a}, \frac{d}{dx}f|_{x=a} \quad (80)$$



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Définition de la dérivée



### Théorème

*Toute fonction  $f$  dérivable en un point  $a \in E_f$  est continue en ce point.*

### Proof.

Supposons que  $f$  soit dérivable en  $a \in E_f$ . On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= 0 \times f'(a).\end{aligned}$$

D'où la continuité de  $f$  en  $x = a$ .



## Dérivabilité d'une fonction en un point



Fonctions usuelles

Limite d'une fonction

Continuité d'une fonction

Dérivabilité d'une fonction

La réciproque du Théorème 43 n'est pas vraie. En effet,  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $x = 0$ . Cependant, elle n'est dérivable en ce point.

Voici les circonstances pouvant faire en sorte qu'une fonction  $f$  ne soit pas dérivable en  $x = a$ .

- $f$  est discontinue en  $x = a$ .  
 $x \mapsto \frac{1}{x}$  est discontinue en  $x = 0$ . Cette fonction n'est pas dérivable en ce point.
- La courbe représentative de  $f$  admet une tangente verticale en  $x = a$ . Autrement dit,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty \end{cases}$$





$x \mapsto \sqrt[3]{x}$  admet une tangente verticale en  $x = 0$ . Cette fonction n'est pas dérivable en ce point.

- La courbe représentative de  $f$  forme un angle en  $x = a$ .  
 $x \mapsto |x|$  forme un angle en  $x = 0$ . Cette fonction n'est pas dérivable en ce point.

## Définition (Équation de la tangente à la courbe)

*Soit  $f$  une fonction dérivable en point  $a$ , alors la tangente à la courbe représentative de  $f$  a pour équation:*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \quad (81)$$



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Fonction dérivée



On observe que si le réel  $a$  de (76) est substitué par une variable  $x$ , on obtient une fonction de  $x$ , appelée **dérivée**.

### Définition

La fonction dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  est

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (82)$$

si cette limite existe.

En posant  $t = x + h$ , (82) devient:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}. \quad (83)$$



# Dérivabilité d'une fonction en un point

## Fonction dérivée



- Géométriquement,  $f'(x)$  correspond à la pente de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(x, f(x))$ . De plus,  $f'(x)$  correspond physiquement au taux de variation instantané d'une fonction  $f$ .
- L'ensemble de définition de  $f'$  est l'ensemble des réels pour lesquels (82) est satisfaite.

$$E_{f'} = \left\{ x \in E_f : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \right\} \quad (84)$$

- Si  $y = f(x)$ , alors l'une des notations ci-dessous peut être utilisée pour désigner la dérivée de  $f$ :

$$f', y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f \quad (85)$$



# Dérivabilité d'une fonction

## Extrêmes absolus d'une fonction



### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur  $E_f$  et  $x_0 \in E_f$ .

- $f(x_0)$  est la **valeur maximale absolue** de  $f$  si

$$\forall x \in E_f, f(x) \leq f(x_0). \quad (86)$$

- $f(x_0)$  est la **valeur minimale absolue** de  $f$  si

$$\forall x \in E_f, f(x_0) \leq f(x). \quad (87)$$

Le maximum ou le minimum absolu d'une fonction est parfois dit: **global**.

Les valeurs maximale et minimale d'une fonction  $f$  sont appelées: **valeurs extrêmes** de  $f$ .





# Dérivabilité d'une fonction

## Extrêmes absolus d'une fonction

### Théorème (Théorème des valeurs extrêmes)

*Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , alors il existe  $c, d \in [a, b]$  tels que:*

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq f(c)$$

$$\forall x \in [a, b], f(d) \leq f(x).$$

Autrement dit,  $f$  atteint un maximum absolu  $f(c)$  et un minimum absolu  $f(d)$  sur  $[a, b]$ .

### Définition (Point critique)

*Soit  $f$  une fonction définie sur  $E_f$ .  $x_0 \in E_f$  est un **point critique** de  $f$  si  $f'(x_0) = 0$  ou  $f'(x_0)$  n'est pas définie.*



# Dérivabilité d'une fonction

## Extrêmes absolus d'une fonction



Voici la procédure permettant de déterminer les valeurs extrêmes d'une fonction  $f$ , continue sur  $[a, b]$ .

- 1 Déterminer les points critiques de  $f$  sur  $]a, b[$ .
- 2 Trouver les valeurs de  $f$  en ses points critiques.
- 3 Calculer  $f(a)$  et  $f(b)$ .
- 4 Comparer les valeurs obtenues en 1) et 2).

Le **maximum absolu** de  $f$  est la plus grande de ces valeurs tandis que le **minimum absolu** est la plus petite d'entre elles.



# Dérivabilité d'une fonction

## Extrêmes relatifs d'une fonction



### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur  $E_f$  et  $x_0 \in E_f$ .

- $f(x_0)$  est un **maximum relatif** de  $f$  s'il existe  $h > 0$ :

$$\forall x \in ]x_0 - h, x_0 + h[, f(x) \leq f(x_0). \quad (88)$$

- $f(x_0)$  est la **minimum relatif** de  $f$  si

$$\forall x \in ]x_0 - h, x_0 + h[, f(x_0) \leq f(x). \quad (89)$$

Un maximum ou un minimum relatif d'une fonction est parfois dit: **local**.



# Dérivabilité d'une fonction

## Extrêmes relatifs d'une fonction



### Lemme (Test de la dérivée première)

Soit  $f$  une fonction continue en  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$ .

① S'il existe  $]a, b[$  contenant  $x_0$  tel que:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{si } a < x < x_0 \\ f'(x) < 0, & \text{si } x_0 < x < b. \end{cases}$$

Alors  $f$  admet un **maximum relatif** en  $x_0$ .

② S'il existe  $]a, b[$  contenant  $x_0$  tel que:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{si } a < x < x_0 \\ f'(x) > 0, & \text{si } x_0 < x < b. \end{cases}$$

Alors  $f$  admet un **minimum relatif** en  $x_0$ .





**N.B:** Si  $f'$  ne change pas de signe en  $x_0$ , alors  $f$  n'a ni maximum relatif ni minimum relatif en  $x_0$ .

### Lemme (Test de la dérivée seconde)

Soit  $f$  une fonction. Supposons que  $f''$  soit continue au voisinage de  $x_0$ .

- 1 Si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) > 0$ , alors  $f$  admet un **minimum relatif** en  $x_0$ .
- 2 Si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) < 0$ , alors  $f$  admet un **maximum relatif** en  $x_0$ .
- 3 Si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) = 0$ , alors on ne peut conclure. Il est éventuel que  $f$  admette soit: un maximum relatif soit un minimum relatif ou un **point d'inflexion**.





## Définition

*Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , si elle est dérivable en tout point de  $I$ .*

## Théorème (Théorème de Rolle)

*Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Si*

- *$f$  est continue sur  $[a, b]$*
- *$f$  est dérivable sur  $]a, b[$*

*Si de plus,  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que:*

$$f'(c) = 0. \quad (90)$$





## Théorème (Théorème des accroissements finis)

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Si

- $f$  est continue sur  $[a, b]$
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (91)$$





## Théorème

*Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a, b[$ . Si*

$$\forall x \in ]a, b[, f'(x) = 0,$$

*alors  $f$  est constante sur  $]a, b[$ .*

## Corollaire

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $]a, b[$ . Si*

$$\forall x \in ]a, b[, f'(x) = g'(x),$$

*alors  $f - g$  est constante sur  $]a, b[$ , i.e, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,*

$$f(x) = g(x) + c, (c \in \mathbb{R}).$$



# Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

## Monotonie d'une fonction



### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est dite **croissante** sur  $I$  si

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- $f$  est dite **décroissante** sur  $I$  si

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

- $f$  est dite **strictement croissante** sur  $I$  si

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- $f$  est dite **strictement décroissante** sur  $I$  si

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$



# Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

## Monotonie d'une fonction



### Théorème (Test de croissance et décroissance)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  **croissante** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ .
- $f$  **décroissante** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ .
- $f$  **strictement croissante** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$ .
- $f$  **strictement décroissante** sur  $I$  si  $\forall x \in I, f'(x) < 0$ .

### Définition (Convexité)

Une fonction  $f$  est dite **convexe** sur un intervalle  $I$  si sa représentation graphique se situe au dessus de toutes ses tangentes sur  $I$ .



# Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

## Convexité-Concavité



### Théorème (Test sur la convexité)

Une fonction  $f$  est **convexe** sur un intervalle  $I$  si

$$\forall x \in I, f''(x) > 0.$$

### Définition (Concavité)

Une fonction  $f$  est dite **concave** sur un intervalle  $I$  si sa représentation graphique se situe au dessous de toutes ses tangentes sur  $I$ .

### Théorème (Test sur la concavité)

Une fonction  $f$  est **concave** sur un intervalle  $I$  si

$$\forall x \in I, f''(x) < 0.$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Lemme

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables et  $g'(x) \neq 0$  sur un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ). Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$





## Remarques

- *La règle de l'Hôpital sert à lever les formes indéterminées du type:*

$$0/0 \quad \infty/\infty.$$

- *On peut aussi s'en servir pour lever les formes indéterminées usuelles du type:*

$$0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

- *La règle de l'Hôpital s'applique aussi dans les cas suivants:*

$$\begin{array}{cc} x \rightarrow a^- & x \rightarrow a^+ \\ x \rightarrow -\infty & x \rightarrow \infty. \end{array}$$





## Théorème

Soient  $f$ ,  $g$  deux fonctions dérivables et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $f \pm g$  est dérivable, de dérivée  $(f \pm g)'$  telle que:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'. \quad (92)$$

- $\alpha f$  est dérivable, de dérivée  $(\alpha f)'$  telle que:

$$(\alpha f)' = \alpha f'. \quad (93)$$

- $fg$  est dérivable, de dérivée  $(fg)'$  telle que:

$$(fg)' = f'g + g'f. \quad (94)$$

- $f/g$  est dérivable, de dérivée  $(f/g)'$  telle que:

$$(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{(g)^2}. \quad (95)$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Théorème (Dérivée de fonctions composées)

*Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables, alors les fonctions composées  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  sont aussi dérivables, de fonctions dérivées respectives:*

$$\begin{cases} (f \circ g)' = g' \times f' \circ g \\ (g \circ f)' = f' \times g' \circ f. \end{cases} \quad (96)$$

## Théorème (Dérivée d'une bijection réciproque)

*Si  $f : I \rightarrow J$  est une fonction bijective dérivable, alors sa bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  l'est aussi, de dérivée:*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (97)$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Règles de dérivation)

*Si  $f$  est une fonction dérivable et  $a > 1$ , alors*

$$[f(x)^n]' = nf'(x)[f(x)]^{n-1}, \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$[e^{f(x)}]' = f'(x)e^{f(x)}$$

$$[a^{f(x)}]' = (\ln a)f'(x)a^{f(x)}$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

$$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Règles de dérivation)

$$[\sin (f(x))]' = f'(x) \cos[f(x)]$$

$$[\cos (f(x))]' = -f'(x) \sin[f(x)]$$

$$[\tan (f(x))]' = f'(x) [1 + \tan^2 (f(x))]$$

$$= \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$$

$$[\cot (f(x))]' = -f'(x) [1 + \cot^2 (f(x))]$$

$$= \frac{-f'(x)}{\sin^2[f(x)]}$$

$$[\sec (f(x))]' = f'(x) \tan[f(x)] \sec[f(x)]$$

$$[\csc (f(x))]' = -f'(x) \cot[f(x)] \csc[f(x)]$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Règles de dérivation)

$$[\sinh (f(x))]^{\prime} = f^{\prime}(x) \cosh [f(x)]$$

$$[\cosh (f(x))]^{\prime} = f^{\prime}(x) \sinh [f(x)]$$

$$[\tanh (f(x))]^{\prime} = f^{\prime}(x) (1 - \tanh ^2[f(x)])$$

$$= \frac{f^{\prime}(x)}{\cosh ^2[f(x)]}$$

$$[\coth (f(x))]^{\prime} = f^{\prime}(x) (1 - \coth ^2[f(x)])$$

$$= \frac{-f^{\prime}(x)}{\sinh ^2[f(x)]}$$

$$[\operatorname{Arcsin} (f(x))]^{\prime} = \frac{f^{\prime}(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Règles de dérivation)

$$[\operatorname{Arccos}(f(x))]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$$

$$[\operatorname{Arctan}(f(x))]' = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

$$[\operatorname{Arccot}(f(x))]' = \frac{-f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

$$[\operatorname{Arcsec}[f(x)]]' = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$$

$$[\operatorname{Arccsc}[f(x)]]' = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$$





## Corollaire (Règles de dérivation)

$$[\text{Argcosh}(f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$$

$$[\text{Argsinh}(f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}}$$

$$[\text{Argtanh}(f(x))]' = \frac{f'(x)}{1 - [f(x)]^2}$$

En particulier, si  $f = id$ , alors les règles de dérivation ci-dessus deviennent:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (n \in \mathbb{R})$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Formules de dérivation)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}, \quad (k \neq 0)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = 1 + \cot^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Formules de dérivation)

$$(\sec x)' = (\sec x)(\tan x)$$

$$(\csc x)' = -(\csc x)(\cot x)$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\operatorname{Arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

## Corollaire (Formules de dérivation)

$$(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{Arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{Arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{Arccsc} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{Argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{Argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{Argtanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$





Soit une équation implicite de la forme:

$$F(x, y) = G(x, y)$$

Voici les étapes à suivre pour déterminer  $\frac{dy}{dx}$ :

- 1 Calculer la dérivée des deux membres de l'équation, i.e.,

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = \frac{d}{dx}G(x, y) \quad (98)$$

- 2 Isoler  $\frac{dy}{dx}$  de l'équation (98).





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

Si l'expression analytique d'une fonction  $y = f(x)$  comporte des produits, quotients ou des puissances, alors pour déterminer sa dérivée, on peut faire recours à la technique de dérivation appelée: **dérivée logarithmique**.

Voici les étapes à suivre pour déterminer  $\frac{dy}{dx}$ :

- 1 Composer les deux membres de l'équation  $y = f(x)$  par  $\ln$  puis appliquer les propriétés logarithmiques à l'équation résultante.

$$\ln y = \ln[f(x)] \quad (99)$$

- 2 Dériver implicitement par rapport à  $x$
- 3 Résoudre l'équation obtenue par rapport à  $y'$ .





Fonctions usuelles

Limite d'une  
fonctionContinuité d'une  
fonctionDérivabilité d'une  
fonction

La dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  est une fonction. Ainsi, si elle est à son tour dérivable, alors sa dérivée est notée  $f''$  et est appelée: **dérivée seconde** de  $f$ , ainsi de suite.

## Définition

*La dérivée  $n$ -ième  $f^{(n)}$ , d'une fonction  $f$  est la fonction obtenue après une succession de  $n$ -dérivées de  $f$ .*

## Proposition

*Si  $f$  est une fonction continument dérivable jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , alors  $f$  admet une dérivée  $n$ -ième.*

- Il est notoire qu'une fonction  $f$  peut être indéfiniment dérivable.

