

## Questions pour DGD.9 MAT1720

### Question: 1

Évaluer  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 13} dx$

### Solution:

On ne peut pas factoriser  $x^2 + 4x + 13$  sur les réels (formule quadratique). Alors on complète le carré.

$$x^2 + 4x + 13 = \dots = 9 \left[ \left( \frac{x+2}{3} \right)^2 + 1 \right]$$

On fait une substitution trigonométrique de  $(x+2)/3 = \tan \theta$ ,  $dx/3 = \sec^2 \theta d\theta$  avec limites  $\theta = \arctan(2/3)$  et  $\theta = \arctan(3/3) = \pi/4$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 13} dx &= \int_0^1 \frac{x}{9 \left[ \left( \frac{x+2}{3} \right)^2 + 1 \right]} dx = \int_{\arctan(2/3)}^{\pi/4} \frac{3 \tan \theta - 2}{9 [\tan^2 \theta + 1]} 3 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\arctan(2/3)}^{\pi/4} (3 \tan \theta - 2) d\theta \\ &= \frac{1}{3} (\ln(\sec \theta) - 2\theta) \Big|_{\arctan(2/3)}^{\pi/4} \end{aligned}$$

### Question: 2

Évaluer  $\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x}}$

### Solution:

Ceci paraît bizarre. Possiblement des fractions partielles, sauf pour la racine carrée. On répare ceci en posant  $u = \sqrt{x}$ ,  $du = dx/(2\sqrt{x})$ . Ceci donne  $x = u^2$  et  $dx = 2u du$ .

$$\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x}} = \int \frac{2u du}{u^4 + u^3} = 2 \int \frac{du}{u^3 + u^2} = 2 \int \frac{du}{u^2(u+1)}$$

Maintenant des fractions partielles.

$$2 \int \left( \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} \right) du$$

On trouve les constantes de l'équation  $Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2 = 1 = 1 + 0u + 0u^2$ , ensuite on intègre pour avoir des logarithmes une puissance.

**Question: 3**

Évaluer  $\int \frac{\sec^2 t \, dt}{\tan^2 t + 3 \tan t + 2}$

**Solution:**

Ceci paraît bizarre, mais c'est des fractions partielles. Le dénominateur semble comme un polynôme, donc on essaie une substitution de  $u = \tan t$ ,  $du = \sec^2 t$  pour rendre plus clair.

$$\int \frac{\sec^2 t \, dt}{\tan^2 t + 3 \tan t + 2} = \int \frac{1}{u^2 + 3u + 2} \, du$$

Fractions partielles classique.

$$\int \frac{1}{u^2 + 3u + 2} \, du = \int \frac{1}{(u+2)(u+1)} \, du = \int \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1} \, du$$

On a  $1 = A(u+1) + B(u+2)$  et donc  $0u + 1 = (A+B)u + (A+2B)$ . Ceci donne  $0 = A+B$  et  $1 = A+2B$  alors ...  $A = -1$  et  $B = 1$ . On obtient alors des logarithmes et on récrit on termes de  $x$ ...

**Question: 4**

Évaluer  $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} \, dx$  à l'aide d'une substitution et des fractions partielles...

**Solution:**

Plusieurs idées: peut-être  $x = \tan \theta$ , mais on a une racine cubique et non une racine carré. Une chose à vérifier est de changer la racine cubique à un seul terme, alors  $u = x^2 + 1$ ,  $du = 2x \, dx$ .

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}} x \, dx = \int \frac{u-1}{\sqrt[3]{u}} \, du = \int (u^{2/3} - u^{-1/3}) \, du$$

Maintenant on intègre les puissances...

**Question: 5**

Évaluer  $\int \arctan(\sqrt{x}) \, dx$

**Solution:**

Deux idées: soit intégration par parties car on préfère dériver  $\arctan$ , ou substitution pour obtenir  $\arctan(u)$ . En fait, les deux sont bonnes, et sont similaires.

Intégration par parties.

$$u = \arctan(\sqrt{x}), \quad du = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

Ceci donne l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int \arctan(\sqrt{x}) \, dx &= uv - \int v \, du = x \arctan(\sqrt{x}) - \int \frac{x}{1 + (\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\ &= x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + x} \, dx \end{aligned}$$

On pose  $z = \sqrt{x}$ , on aura  $z^2 = x$  et  $dx = 2z \, dz$ . D'où

$$\begin{aligned} \int \arctan(\sqrt{x}) \, dx &= \int \arctan(z) 2z \, dz = z^2 \arctan(z) - \int \frac{z^2}{1 + z^2} \, dz \\ &= z^2 \arctan(z) - \int \frac{z^2 + 1 - 1}{1 + z^2} \, dz \\ &= z^2 \arctan(z) - \int dz + \int \frac{1}{1 + z^2} \, dz \\ &= z^2 \arctan(z) - z + \arctan(z) \\ &= (x + 1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

**Question: 6**

Évaluer  $\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx$

**Solution:**

C'est une bonne question pour discuter. D'un côté, on peut "simplement" faire l'expansion du  $(\quad)^8$  et avoir des puissances. On pourrait même utiliser le théorème binomial pour faire l'expansion, ce n'est pas si pire...

Mais on peut faire mieux avec une simple substitution: c'est un bon exemple de comment une substitution peut rendre plus clair. On pose  $z = 1 + \sqrt{x}$  et alors  $dz = 1/(2\sqrt{x}) dx$ , et donc  $dx = 2(z - 1) dz$ . Les limites d'intégration ont changé... L'étape essentiel est de résoudre pour  $dx$ . On obtient l'intégrale directement.

$$\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8 dx = \int_1^2 z^8 2(z - 1) dz = 2 \int_1^2 (z^9 - z^8) dz$$

Intégrer les puissances...

**Question: 7**

Évaluer  $\int \sin(\sqrt{at}) dt$

**Solution:**

C'est un peu comme  $\int \arctan \sqrt{x} dx$  ci-haut, sauf que l'intégration directe par parties est moins utile. Mais la substitution reste utile. Un autre exemple de pourquoi la substitution peut simplifier. On pose  $u = \sqrt{at}$  et on a donc  $du = a dt/(2\sqrt{at})$ , d'où on obtient  $dt = 2u du/a$ .

$$\int \sin(\sqrt{at}) dt = \frac{1}{a} \int \sin(u) 2u du$$

Intégration directe par parties...

**Question: 8**

Évaluer  $\int_0^{\pi/4} \tan^3 \theta \sec^2 \theta \, d\theta$

**Solution:**

a) Méthode 1

On sait que  $(\tan \theta)' = \sec^2 \theta$ ; puisque la puissance de  $\sec \theta$  est pair ceci marche. On a  $u = \tan \theta$ , et on change les limites d'intégration.

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3 \theta \sec^2 \theta \, d\theta = \int_0^1 u^3 \, du$$

Facile...

B) Méthode 2

On sait aussi que  $(\sec \theta)' = \sec \theta \tan \theta$ ; puisque la puissance de  $\tan \theta$  est impair ceci marche. On a  $u = \sec \theta$ , et on change les limites d'intégration.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^3 \theta \sec^2 \theta \, d\theta &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \sec \theta \tan \theta \sec \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \tan \theta \sec \theta \, d\theta \\ &= \int_1^{1/\sqrt{2}} (u^2 - 1)u \, du \end{aligned}$$

Facile...

**Question: 9**

Évaluer  $\int x^5 e^{-x^3} \, dx$

**Solution:**

Peut-être intégration par parties? Mais attention:  $dv = e^{-x^3} \, dx$  n'est pas bon, on veut  $dv = x^2 e^{-x^3} \, dx$ . Mais ceci suggère une simplification par substitution: poser  $z = x^3$  et  $dz = 3x^2 \, dx$ .

$$\int x^5 e^{-x^3} \, dx = \int x^3 e^{-x^3} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int z e^{-z} \, dz$$

Intégration par parties...

**Question: 10**

Évaluer  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

**Solution:**

Racine carré de quadratique suggère substitution trig. La forme qu'on cherche est  $4x^2 = \sec^2 \theta$ , donc  $\sec \theta = 2x$ ,  $\sec \theta \tan \theta d\theta = 2 dx$ .

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{8} \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^2 \theta \sqrt{\sec^2 \theta - 1}} = \frac{1}{8} \int \cos \theta d\theta$$

On obtient alors une intégrale facile en termes de trig. Utiliser un triangle pour réécrire en termes de  $x$ .

**Question: 11**

Évaluer  $\int \frac{x + \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Solution:**

Encore une substitution trig. Le arcsin paraît bizarre, mais on verra... On pose  $x = \sin \theta$  et  $dx = \cos \theta d\theta$ . Ceci donne  $\arcsin(x) = \theta$ .

$$\int \frac{x + \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin \theta + \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta = \int (\sin \theta + \theta) d\theta$$

On découvre une intégrale facile... Remettre en termes de  $x$ .