[3] **1.** Soit $f(x) = \arctan(x)$. On cherche à estimer $f(1.01)$ à l'aide d'une linéarization de $f(x)$.

a) Donner la linéarisation de $f(x)$ à une valeur bien-choisie a. Votre réponse ne devrait inclure aucune fonction trigonmétrique ou trigonmétrique réciproque, mais ce n'est pas nécessaire de simplifier.

solution:

solution: On choisit $a = 1$.
On trouve $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.
Alors $f(a) = (1)^{1/3} = 1$ et $f'(a) = \frac{1}{3}(1)^{-2/3} = \frac{1}{3}$.
L'équation de la droite et alors

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$L(x) = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$$

b) Utiliser votre linéarisation pour estimer $f(1.01)$. Ce n'est pas nécessaire de simplifier votre réponse.

solution:

solution: On met $x = 1.01$ dans $L(x)$.

$$f(1.01) \approx L(1.01) = \frac{1}{3}(1.01 - 1) + 1 = 1 + \frac{0.01}{3}$$

[2] **2.** Évaluer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{e^x-1}^{e^{2x}-1} \Big(\ln(1+t)\Big)^7 \,\mathrm{d}t$. Ce n'est pas nécessaire de simplifier votre réponse.

solution:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{e^x-1}^{e^{2x}-1} \Big(\ln(1+t)\Big)^7 \,\mathrm{d}t &= \Big(\ln\big(1+(e^{2x}-1)\big)\Big)^7 (e^{2x}-1)' - \Big(\ln\big(1+(e^{x}-1)\big)\Big)^7 (e^{x}-1)' \\ &= \Big(\ln\big(1+(e^{2x}-1)\big)\Big)^7 2e^{2x} - \Big(\ln\big(1+(e^{x}-1)\big)\Big)^7 e^{x}\end{aligned}$$

Pour intérêt, cette expression se simplifie à $x^7e^x(256e^x - 1)$.

[2] **3.** La température d'une substance chimique qui subit une réaction chimique est donnée par $H(t)$. On connaît que le taux de changement de $H(t)$ est donné par $H'(t) = \dfrac{1}{t}$ entre $t = 2$ et $t = 10$ secondes. Déterminer le changement net de $H(t)$ entre $t = 2$ et $t = 10$.

solution: Le changement net de $H(t)$ est $\int_2^{10} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_2^{10} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(t)\,\Big|_2^{10} = \ln(10) - \ln(2)$$

[**2**] **4.** Pour chaque fonction $f(x)$, donner la primitive générale $F(x)$. Pour cette question seulement, aucune justification n'est requise.

a) $f(x) = (x+5)^7$

solution: $f'(x) = \dfrac{(x+5)^8}{8} + C$

b) $f(x) = \sec(x)\tan(x)$

solution: $f'(x) = \sec(x) + C$

[**6**] **5.** Évaluer chacune des intégrales définies suivantes. Montrer votre travail!

a) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

solution:

solution: Intégration par parties.

$$u = \arctan(x) \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad v = x$$

On calcul l'intégrale indéfine premièrement (c'est optionnel mais on peut croire que la présentation est plus claire).

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

La deuxième intégrale se fait par la substitution $w = 1 + x^2$, $\mathrm{d}w = 2x\,\mathrm{d}x$.

$$\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{2} = \frac{1}{2}\ln|w| = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$$

(On aurait pu écrire $\ln(w)$ au lieu de $\ln|w|$ ici car $w = 1 + x^2 > 0$.) On évalue aux limites d'intégration.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \left(x\arctan(x) - \left(\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(1\arctan(1) - \left(\frac{1}{2}\ln\left|1+(1)^2\right|\right)\right) - \left(0\arctan(0) - \left(\frac{1}{2}\ln\left|1+0^2\right|\right)\right) \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^3 t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t$

solution:

solution: Substitution.

$$z = 1 - \sqrt{t},\ \mathrm{d}z = \frac{-1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Les limites d'intégration changent aussi.

$$\begin{cases} t = 4 \implies w = 1 - \sqrt{4} = -1 \\ t = 1 \implies w = 1 - \sqrt{1} = 0 \end{cases}$$

On obtient l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} \sin(z)(-2)\,\mathrm{d}z &= \Big(2\cos(z)\Big)\Big|_0^{-1} \\ &= 2\cos(-1) - 2\cos(0) \\ &= 2\cos(-1) - 2 \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_1^2 2s^3 e^{(s^2)}\,\mathrm{d}s$

solution:

solution: Une substitution simplifie.

$$\begin{aligned} &w = s^2,\ \mathrm{d}w = 2s\,\mathrm{d}s \\ &s = 1 \implies w = (1)^2 = 1 \\ &s = 2 \implies w = (2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Ici il faut utiliser deux fois la substitution.

$$\int_1^2 2s^3 e^{(s^2)}\,\mathrm{d}s = \int_1^2 s^2 e^{(s^2)} 2s\,\mathrm{d}s = \int_1^4 we^w\,\mathrm{d}w$$

Maintenant par parties.

$$\begin{aligned} u &= w & \mathrm{d}v &= e^w\,\mathrm{d}w \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}w & v &= e^w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 we^w\,\mathrm{d}w &= \Big(we^w\Big)\Big|_1^4 - \int_1^4 e^w\,\mathrm{d}w \\ &= \Big(we^w\Big)\Big|_1^4 - \Big(e^w\Big)\Big|_1^4 \\ &= \Big(4e^4 - e\Big) - \Big(e^4 - e\Big) \\ &= 3e^4 \end{aligned}$$

[5] **6.** On cherche à évaluer $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 - 2x + 10)^{5/2}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une substitution trigonométrique.

a) En choisissant une substitution trig convenant et en simplifiant le résultat, montrer que

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2x + 10)^{5/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3^4}\int \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

solution:

solution: On complète le carré.

$$\begin{aligned}&x^2 - 2x + 10\\&= (x^2 - 2x + 1) + 10 - 1\\&= (x-1)^2 + 9\\&= 9\left[\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + 1\right]\end{aligned}$$

C'est donc une substitution avec $\tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{3} &= \tan\theta\\ \frac{\mathrm{d}x}{3} &= \sec^2\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

On réécrit en terms de θ.

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{(x^2-2x+10)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\\&= \int \frac{1}{\left(9\left[(\frac{x-1}{3})^2+1\right]\right)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\\&= \int \frac{1}{\left(9\left[\tan^2\theta+1\right]\right)^{5/2}} 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&= \frac{1}{3^4}\int \frac{1}{(\sec^2\theta)^{5/2}}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&= \frac{1}{3^4}\int \frac{1}{\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&= \frac{1}{3^4}\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

b) Évaluer $\dfrac{1}{3^4}\displaystyle\int \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ en termes de θ.

solution:

solution: On converti certains cos en sin.

$$\frac{1}{3^4}\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3^4}\int \cos^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3^4}\int (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

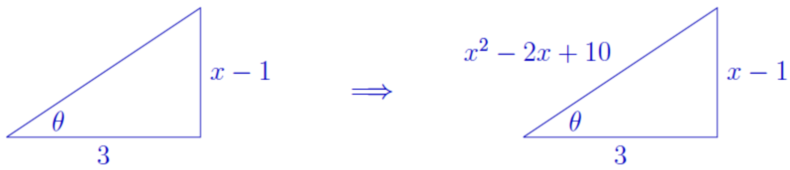
Maintenant on peut intégrer avec la substitution $z = \sin\theta$ et $\mathrm{d}z = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$\frac{1}{3^4}\int (1-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3^4}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) + C = \frac{1}{3^4}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right) + C$$

c) Exprimer votre réponse à la question b) en termes de x selon la substitution trig que vous avez choisie à la question a). Votre réponse finale ne devrait inclure aucune fonction trigonométrique ou trigonométrique réciproque.

solution:

solution: On donne un triangle qui correspond à $\tan\theta = \frac{x-1}{3}$. Pythagore dit comment trouver la longuer de l'hypoténseuse.



On a donc que $\sin\theta = (x-1)/\sqrt{x^2-2x+10}$. Le résultat de l'intégrale est

$$\frac{1}{3^4}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right) + C = \frac{1}{3^4}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\right)^3\right) + C$$

[**2**] **7.** Évaluer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$. Votre réponse devrait être valide pour tout x du domaine.

solution:

solution: Le dénominateur est déjà factorisé. Il y a une racine répétée, donc on a un terme de plus dans la décompositon.

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

On trouve les constantes.

$$1 = a(x)(x-1) + b(x-1) + c(x^2)$$
$$1 = -b + (-a+b)x + (a+c)x^2$$

On a donc

$$\begin{cases} 1 = -b \\ 0 = -a+b \\ 0 = a+c \end{cases}$$

Ceci donne $b = -1$, et ensuite $a = b = -1$, et ensuite $c = -a = 1$.

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C$$