MAT 1739 Test 1

Professeur : A. Poëls Date : Mercredi 3 octobre 2018 Durée : 75 minutes.

Espace réservé au correcteur.

Nom Prénom (MAJUSCULES)	CORRECTION 1
Signature	
Numéro d'étudiant	

En signant, vous reconnaissez avoir lu et être d'accord avec les consignes ci-dessous.

- **Les téléphones, les calculatrices, les manuels et notes de cours sont interdits durant l'examen, vous vous exposez à des sanctions pour fraude si vous ne respectez pas ces règles.** Les téléphones doivent être éteints et placés dans votre sac.
- Le test est constitué de cinq questions à choix multiple et de deux exercices à développer. Le barème est indiqué pour chaque exercice.
- Pour les questions à choix multiple, seule la réponse compte (vous n'avez pas à expliquer ou justifier vos réponses). Une bonne réponse vaut 2 points, une mauvaise réponse vaut −0.5 point. Vous pouvez aussi décider de ne rien répondre (0 point).
- Pour les exercices 2 et 3, vous devez donner des solutions complètes et justifier vos affirmations. Pour avoir tous les points, votre écriture doit être lisible et votre raisonnement doit être facilement compréhensible.
- Ne détachez pas les pages de l'examen. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour le travail au brouillon ou pour répondre aux questions si vous manquez d'espace.

Reportez vos réponses pour les questions à choix multiples dans les cases ci-dessous.

Réponses pour les questions à choix multiples :

d	c	d	a	a
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Exercice 1 (Questions à choix multiple). **Reportez vos réponses sur les cadres réservés à cet effet sur la première page.**

(1) Le taux de variation moyen de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x - 1$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est :

(a) -1
(b) 1
(c) 2
$\boxed{\text{(d) } 3}$

$TVM = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0}$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 2^2+2-1 = 5 \\ f(0) = 0^2+0-1 = -1 \end{array}\right) \Rightarrow TVM = \dfrac{5-(-1)}{2} = \boxed{3}$

(2) La limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2+1}{-x+2}$ vaut :

(a) -10
(b) -8
$\boxed{\text{(c) } 8}$
(d) 10

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2+1}{-x+2} = \dfrac{-3^2+1}{-3+2} = \dfrac{-8}{-1} = \boxed{8}$.

(3) La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5x-7}{2x^2+1}$ vaut :

(a) $\frac{1}{2}$
(b) 0
(c) $+\infty$
$\boxed{\text{(d) } -\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5x-7}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = \boxed{-\infty.}$

(4) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{x-1}$ est la fonction :

$\boxed{\text{(a)}}$ $x \mapsto -\dfrac{6}{(x-1)^2}$

(b) $x \mapsto \dfrac{6}{(x-1)^2}$

(c) $x \mapsto \dfrac{5}{(x-1)^2}$

(d) $x \mapsto -\dfrac{5}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{4(x-1) - (4x+2)\times 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{4x} - 4 - \cancel{4x} - 2}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{-6}{(x-1)^2}}$

(5) Le taux de variation instantané de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ en $x = \frac{1}{4}$ est

$\boxed{\text{(a) } 1}$
(b) 2
(c) 3
(d) 4

TVI de f en $\frac{1}{4} = f'(\frac{1}{4})$.

On a $f'(x) = 2\times 2x = 4x$.

$\Rightarrow f'(\frac{1}{4}) = \frac{4}{4} = \boxed{1}$.

Exercice 2 (6 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+4}$.

(a) Déterminez le domaine de définition de f.

(b) Calculez la dérivée de f.

a) On cherche les x tels que $x^2-2x+4=0$.

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 4 = -12 < 0 \to$ pas de racine

D'où $\boxed{\text{domaine de définition de } f = \mathbb{R}}$

b) On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\to f'(x) = \frac{2(x^2-2x+4) - (2x+1)(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x+8 - (4x^2-4x+2x-2)}{(x^2-2x+4)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^2-2x+10}{(x^2-2x+4)^2}}.$$

Vous devez détailler les réponses aux questions suivantes.

***Exercice* 3** (9 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{(-2x+1)(3-x)}{3x+6}$.

(a) Déterminez le domaine de définition de f.

(b) Dressez le tableau de signes de f.

(c) Déterminez les asymptotes à la courbe de f en $+\infty$ (on ne demande pas de chercher d'autres asymptotes éventuelles).

a) On résout $3x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ est } \mathbb{R}\setminus\{-2\}}$

b)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $3x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Recherche asymptote horizontale en $+\infty$:

On écrit $f(x) = \frac{(-2x+1)(3-x)}{3x+6} = \frac{-6x-2x\cdot(-x)+3-x}{3x+6}$

$= \frac{2x^2-7x+3}{3x+6}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x} = +\infty \Rightarrow$ pas d'asymptote horizontale

Recherche d'asymptote oblique :

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{2}{3}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+3}{3x+6} - \frac{2}{3}x\left(\frac{3x+6}{3x+6}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+3-\frac{2}{3}x(3x+6)}{3x+6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2x^2}-7x+3-\cancel{2x^2}-4x}{3x+6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-11x+3}{3x+6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-11\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \boxed{-\frac{11}{3}}.$$

Donc la droite d'équation $\boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.