MAT 1739 Test 2

Professeur : A. Poëls | Date : Lundi 12 novembre 2018 | Durée : 75 minutes

Espace réservé au correcteur.

CORRECTION

Nom Prénom (MAJUSCULES) ______________________

Signature ______________________

Numéro d'étudiant ______________________

En signant, vous reconnaissez avoir lu et être d'accord avec les consignes ci-dessous.

- **Les téléphones, les calculatrices, les manuels et notes de cours sont interdits durant l'examen, vous vous exposez à des sanctions pour fraude si vous ne respectez pas ces règles.** Les téléphones doivent être éteints et placés dans votre sac.
- Le test est constitué de cinq questions à choix multiple et de deux exercices à développer. Le barème est indiqué pour chaque exercice.
- Pour les questions à choix multiple, seule la réponse compte (vous n'avez pas à expliquer ou justifier vos réponses). Une bonne réponse vaut 2 points, une mauvaise réponse vaut -0.5 point. Vous pouvez aussi décider de ne rien répondre (0 point).
- Pour les exercices 2 et 3, vous devez donner des solutions complètes et justifier vos affirmations. Pour avoir tous les points, votre écriture doit être lisible et votre raisonnement doit être facilement compréhensible.
- Ne détachez pas les pages de l'examen. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour le travail au brouillon ou pour répondre aux questions si vous manquez d'espace.

Reportez vos réponses pour les questions à choix multiples dans les cases ci-dessous.

Réponses pour les questions à choix multiples :

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a	b	c	b	a

Exercice 1 (Questions à choix multiple - 10 points). **Reportez vos réponses sur les cadres réservés à cet effet sur la première page.**

(1) Laquelle de ces formules est vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $e^{x+y} = e^x e^y$.
(b) $e^{x+y} = e^x + e^y$.
(c) $e^{xy} = e^x + e^y$.
(d) $e^{xy} = e^x e^y$.

(2) En $x = 0$, la fonction $x \mapsto x^3$ possède :

(a) Un maximum local.
(b) Un point critique qui n'est pas un extremum local.
(c) Un minimum local.
(d) Aucune des réponses précédentes.

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 2x^2 \geq 0$, $f'(0) = 0$
(point critique)

	0
signe $f'(x)$	$+$ 0 $+$
variations de f	$\nearrow$

(3) En $x = 2$, la fonction $x \mapsto e^{2x^2-8x+5}$ possède :

(a) Un point critique qui n'est pas un extremum local.
(b) Un maximum local.
(c) Un minimum local.
(d) Aucune des réponses précédentes.

$g(x) = e^{2x^2-8x+5}$, $g'(x) = (4x-8)e^{2x^2-8x+5}$

$g'(2) = 0 \Rightarrow$ point critique

x	2
signe $g'(x)$	$-$ 0 $+$
	$\searrow$ $\nearrow$

(4) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\sin(x)\cos(x) - 4\cos^3(x)$ est la fonction :

(a) $2\cos^2(x) + 2\sin(x)^2 + 12\sin(x)\cos^2(x)$.
(b) $2\cos^2(x) - 2\sin(x)^2 + 12\sin(x)\cos^2(x)$.
(c) $2\cos^2(x) + 2\sin(x)^2 - 12\sin(x)\cos^2(x)$.
(d) $2\cos^2(x) - 2\sin(x)^2 - 12\sin(x)\cos^2(x)$.

(5) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)$ est la fonction :

(a) $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$.
(b) $-\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$.
(c) $\dfrac{x+2}{(x+1)(x+3)}$.
(d) $-\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)'}{\frac{x+1}{x+3}}$$

$$= \underbrace{\frac{\cancel{x}+3-(\cancel{x}+1)}{(x+3)^{\cancel{2}}}}_{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)'} \times \frac{\cancel{x+3}}{x+1}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

Vous devez détailler les réponses aux questions suivantes.

Exercice 2 (14 points). On définit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

(a) (1 point) Déterminez le domaine de définition de f

Le domaine de f est $\mathbb{R}$ (car f polynomiale)

(b) (2.5 points) Montrez que la courbe n'a pas d'asymptotes.

* Asymptotes horizontales : $\left| \begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty \end{array} \right) \Rightarrow$ pas d'asymptote horizontale.

* Asymptotes obliques : $\left| \begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ pas d'asymptote oblique.

* Pas d'asymptote verticale car f continue sur $\mathbb{R}$.

(c) (2.5 points) Calculez f' et déterminez les deux points critiques de f.

$\boxed{f'(x) = x^2 - x - 2}$

On résout $f'(x) = 0$

Le discriminant vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2 > 0$.

$\Rightarrow$ on a deux racines $\frac{1+3}{2} = 2$ et $\frac{1-3}{2} = -1$.

Les deux points critiques de f sont $\boxed{x = -1 \text{ et } x = 2}$

(d) (3 points) Dressez le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = \frac{1}{3} \times (-1)^3 - \frac{1}{2} \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 2$

$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 2$

$= \frac{19}{6}$

$f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 \times 2 + 2$

$= \frac{8}{3} - 4$

$= \frac{-4}{3}$

(e) (3 points) Déterminez les intervalles de concavité de f.

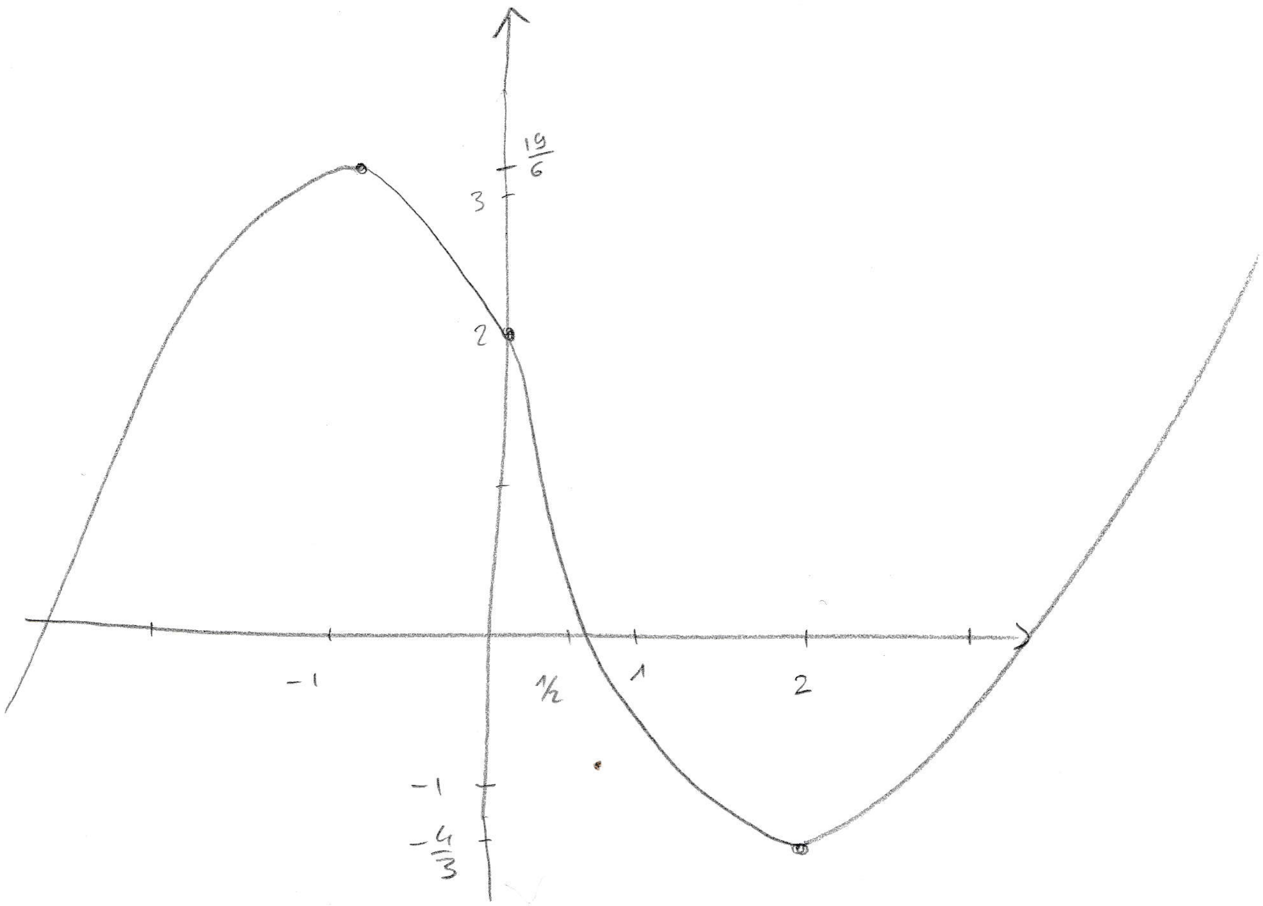
$f'(x) = x^2 - x - 2$

$f''(x) = 2x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Concavité de f		$\cap$		$\cup$	

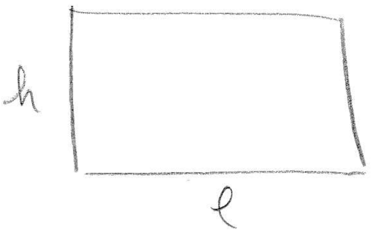
$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ est concave vers le bas sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ et concave vers le bas sur }]\tfrac{1}{2}, +\infty[}$

(f) (2 points) Esquissez le graphe de f.



Exercice 3 (9 points). Bob et Alice ont pour projet de faire un petit potager rectangulaire de l mètres de large sur h mètres de long derrière leur maison. Ils ont acheté 20 mètres de clôture pour cela, le rectangle délimitant le potager a donc un périmètre de 20 mètres.

(a) (1 point) Exprimez le périmètre P du potager en fonction de l et h.



$\underline{P} = 2\ell + 2h \quad (=20)$

(b) (3 points) Déterminez les dimensions l et h qui maximisent l'aire du potager.

$A = \ell \times h$. D'après a) $2\ell + 2h = 20$

$\Rightarrow h = 10 - \ell$.

D'où $A(\ell) = \ell \times (10 - \ell)$

$\boxed{A(\ell) = 10\ell - \ell^2}$.

$A'(\ell) = 10 - 2\ell$

ℓ	0		5		$+\infty$
Signe de $A'(\ell)$		+	0	−	
Variations de A		↗		↘	

$\boxed{\text{L'aire est maximale pour } \ell = 5\text{m et } h = 10 - 5 = 5 \text{ mètres}}$

Alice et Bob s'aperçoivent qu'en utilisant x kilos d'engrais (avec $x \geq 1$) leur jardin produit $f(x) = 20 - x - 9/x$ kilos de légumes par semaine.

(c) (1 point) Déterminez le(s) point(s) critique(s) de f (sur $[1, +\infty[$).

$f'(x) = -1 + \frac{9}{x^2}$. On résout $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -1 + \frac{9}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = \pm 3$.

Le seul point critique de f sur $[1, +\infty[$ est $x = 3$.

(d) (2 point) En utilisant le test de la dérivée seconde, déterminez la nature de ce(s) point(s) critique(s) (maximum, minimum, ni l'un ni l'autre ?).

$f''(x) = -\frac{2 \times 9}{x^3} = \frac{-18}{x^3}$.

$f''(3) = \frac{-18}{27} < 0$ $\Rightarrow$ le test de la dérivée seconde assure que f possède un max local en $x = 3$

(e) (2 point) Déterminez la quantité x d'engrais pour laquelle la production de légumes est maximale.

D'après le cours, si f possède un unique extremum local alors c'est un extremum global. (donc f a un max global en $x = 3$)

On peut aussi vérifier aux extrémités de l'intervalle.

$f(1) = 20 - 1 - \frac{9}{1} = 10$

$f(3) = 20 - 3 - \frac{9}{3} = 14$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ la production est maximale pour $x = 3$ kg d'engrais.