Solutions DGD4 :

1. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$

Si $u, v \in V \Rightarrow$ il existe $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{R}$

tels que

$u = (x_1, y_1, z_1)$ et $x_1+2y_1+z_1=0$

$v = (x_2, y_2, z_2)$ $\quad x_2+2y_2+z_2=0$

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

et $(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)$

$= (x_1+2y_1+z_1)+(x_2+2y_2+z_2) = 0+0=0.$

$\therefore u+v \in V$, donc oui.

2. Soient $g, h \in \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(1)=2\}$

Est-ce que $g+h$ dans l'ensemble?

$(g+h)(x) = g(x)+h(x)$

Si $x=1$, $(g+h)(1) = g(1)+h(1) = 4$

donc, $(g+h)(1) \neq 2$ donc $g+h$ n'est pas dans l'ensemble.

3. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ad-bc=0 \right\}$

alors $ad-bc=0$

$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ et $ka\,kd - kb\,kc$

$= k^2ad - k^2bc$

$= k^2(ad-bc)$

$= k^2(0) = 0.$

Donc, $kA \in \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ad-bc=0 \right\}.$

4. A: $(0,0) \in A$ car $0-3(0)=0$

Si $(x_1,y_1) \in A$, $(x_2,y_2) \in A$

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) = (x_1-3y_1)+(x_2-3y_2)$

$= 0+0 = 0$

donc, $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in A$.

Si $k \in \mathbb{R}$

$k(x_1,y_1) = (kx_1, ky_1)$ et $kx_1 - 3ky_1 = k(x_1-3y_1)$

$= k(0)$ (car $(x_1,y_1) \in A$)

$= 0$

donc, $k(x_1,y_1) \in A$.

$\therefore$ Par le test des sous-espaces, A est un sous-espace.

B: $(0,0) \notin B$ car $0-3(0) = 0 \neq 1$

donc $(0,0) \notin B$

$\therefore$ B n'est pas un sous-espace.

5. $W = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x) \}$.

1) La fonction $f(x)=0$ est la fonction qui joue le rôle de 0 dans $F(\mathbb{R})$.

$f(-x) = 0 = f(x)$. Donc $f(x)=0 \in W$.

2) Si $g,h \in W \Rightarrow g(-x) = g(x)$, $h(-x) = h(x)$

$(g+h)(x) = g(x)+h(x) = g(-x)+h(-x) = (g+h)(-x)$

donc, $g+h \in W$

3) $k \in \mathbb{R}$, $g \in W$

$(kg)(x) = k(g(x)) = k\,g(-x) = (kg)(-x)$

$\therefore kg \in W$.

$\therefore$ W est un sous-espace de $F(\mathbb{R})$.

6) $W = \{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(2) = p(3) = 0\}$

$p \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(2) = 0 \Rightarrow x-2$ divise $p(x)$

$p(3) = 0 \Rightarrow x-3$ divise $p(x)$

$\therefore p(x) = (x-2)(x-3)(ex+f)$, où $e, f \in \mathbb{R}$.

1) $p(x) = 0 \in \mathbb{P}_3$ et $p(2) = p(3) = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \in W$.

2) Si $p(x), q(x) \in W$

$\Rightarrow p(x) = (x-2)(x-3)(e_1x+f_1)$

$q(x) = (x-2)(x-3)(e_2x+f_2)$

$$p(x)+q(x) = (x-2)(x-3)\Big((e_1x+f_1)+(e_2x+f_2)\Big)$$

$$= \underbrace{(x-2)(x-3)\Big((e_1+e_2)x+(f_1+f_2)\Big)}_{\in \mathbb{P}_3 \text{ et } 2 \text{ et } 3 \text{ sont des racines}} \in W$$

3) $kp(x) = k(x-2)(x-3)(e_1x+f_1)$

$= (x-2)(x-3)(ke_1x+kf_1) \in W$.

$\therefore$ W est un sous-espace.

__Autre façon:__

1) $0 \in W$ (comme ci-haut)

2) $p, q \in W \Rightarrow (p+q)(2) = p(2)+q(2) = 0$

$(p+q)(3) = p(3)+q(3) = 0$

donc $p+q \in W$

3) $k \in \mathbb{R}$, $p \in W$

$(kp)(2) = k(p(2)) = k(0) = 0$

$(kp)(3) = k(p(3)) = k(0) = 0$

$\therefore kp \in W$

$\therefore$ W est un sous-espace

7. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid bc = 1 \right\}$

1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W$ car $bc = 0 \neq 1$.

donc W n'est pas un sous-espace.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ comb. lin. de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Si c'est vrai, alors $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

pour $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a & 2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ a = 2 \\ 2a+b = 3 \end{array}$ une contradiction

$\therefore$ Donc, non. Une telle comb. linéaire n'existe pas.

9. $(2,4) \in \text{vect}\{(1,2)\}$ vrai ?

$\text{vect}\{(1,2)\} = \{a(1,2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$= \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Existe-t-il un $a \in \mathbb{R}$ tel que $(2,4) = a(1,2) = (a, 2a)$?

Oui, $a = 2$.

Donc, $(2,4) \in \text{vect}\{(1,2)\}$ est vrai.

10) e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; b = c \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc, $W = \text{vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

De plus, $W = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

donc, $W = \text{vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Plusieurs autres réponses.

k) $\mathbb{P}_2 = \{ p \mid p$ est un polynôme de degré $\leq 2 \}$

$3x^2 - 2x + 1$

$= \{ p = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$-3(-x^2) + 2(-x) - 1(-1)$

$= \text{vect}\{ x^2, x, 1 \}$

De la même façon, $\mathbb{P}_2 = \{ \cancel{p = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}} \}$

$= \{ p = -a(-x^2) - b(-x) - c(-1) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$= \text{vect}\{ (-x^2), -x, -1 \} = \text{vect}\{ -x^2, -x, -1 \}.$

Plusieurs autres réponses comme

$\text{vect}\{ x^2 + 1, x, 1 \}$ etc...