Lec 16

November 6, 2018 8:23 AM

Ex/ Find the general solution of the (NH) system

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 3x^2 + x - 1 \\ -x^2 + 1 + e^{2x} \end{bmatrix}$$

Sol: The corresponding homogeneous system is

$\vec{y}' = A\vec{y}$ (H)

Eigen Values of A $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(8)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$: two complex

Conjugat eigenvalues $\underbrace{\lambda_1 = -2 + 2i}$ $\lambda_2 = -2 - 2i$

E_{λ_1} $[A - \lambda_1 I \mid \vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} -2-(-2+2i) & 1 & 0 \\ -4 & -2-(-2+2i) & 0 \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} -2i & 1 & 0 \\ -4 & -2i & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\overset{-\frac{1}{4}R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2}i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{2iR_1 + R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_2 = t \\ x_1 = -\frac{1}{2}it \end{array}$$

$$[A - \lambda_1 I \mid \vec{0}] = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}it \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} i \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}_{\vec{V}}$$

$$\vec{V} e^{\lambda_1 x} = \begin{bmatrix} i \\ -2 \end{bmatrix} e^{(-2+2i)x} = \begin{bmatrix} i \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2x} \cdot e^{2ix} = \begin{bmatrix} i \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2x} (\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-2x} \sin 2x + i e^{-2x} \cos(2x) \\ -2e^{-2x} \cos(2x) - 2i e^{-2x} \sin(2x) \end{bmatrix}$$

$[\ \ \cos(2x) - 2ie\ \ \sin(2x)]$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-2x}\sin 2x \\ -2e^{-2x}\cos(2x) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{-2x}\cos(2x) \\ -2e^{-2x}\sin(2x) \end{bmatrix}$$

The general solution to (H) is $\vec{y}_H = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$

$$\vec{y}_H = \begin{bmatrix} -C_1e^{-2x}\sin(2x) + C_2e^{-2x}\cos(2x) \\ -2C_1e^{-2x}\cos(2x) + -2C_2e^{-2x}\sin(2x) \end{bmatrix}$$

Next, we find a particular solution to (NH).

Note that:

$$\vec{f}(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2x}$$

- For $\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \rightsquigarrow \vec{y}_p = \vec{u}x^2 + \vec{v}x + \vec{w}$

- For $\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2x}} \longrightarrow \vec{y}_p = \vec{T}e^{2x}$

By the sum rule: $\boxed{\vec{y}_p = \vec{u}x^2 + \vec{v}x + \vec{w} + \vec{T}e^{2x}}$

$$\vec{y}_p' = 2\vec{u}x + \vec{v} + 2\vec{T}e^{2x}$$

Back in (NH):

$$2\vec{u}x + \vec{v} + 2\vec{T}e^{2x} = A\left[\vec{u}x^2 + \vec{v}x + \vec{w} + \vec{T}e^{2x}\right] + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}x^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2x}$$

$A\vec{u} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

$A\vec{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{u}$ (2)

$A\vec{w} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}$ (3)

(1) $\Rightarrow A\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} = A^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 \\ -14 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\vec{u} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -7/4 \end{bmatrix}}}$$

(2) $\Rightarrow A\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 5/8 \\ -7/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A\vec{w} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = V \qquad (3)$$

$$A\vec{T} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{T} \qquad (4)$$

$$(2) \Rightarrow AV = 2\begin{bmatrix} \cdot \\ -7/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 \\ -7/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1/4 \\ -7/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 \\ -7/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \Rightarrow A\vec{w} = \vec{V} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -11/4 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} -11/32 \\ 11/16 \end{bmatrix}$$

$$(4) \Rightarrow A\vec{T} - 2\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 1/20 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} 5/8 \\ \cdot \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 3/8 \\ \cdot \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -11/32 \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/20 \\ \cdot \end{bmatrix} e^{2x}$$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -7/4 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 3/8 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -11/32 \\ 11/16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/20 \\ 1/5 \end{bmatrix} e^{2x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{11}{32} + \frac{1}{20}e^{2x} \\ -\frac{7}{4}x^2 + x + \frac{11}{16} + \frac{1}{5}e^{2x} \end{bmatrix}$$

The general solution to the (NH) is

$$\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_P$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -C_1 e^{-2x}\sin(2x) + C_2 e^{-2x}\cos(2x) + \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{11}{32} + \frac{1}{20}e^{2x} \\ -2C_1 e^{-2x}\cos(2x) - 2C_2 e^{-2x}\sin(2x) - \frac{7}{4}x^2 + x + \frac{11}{6} + \frac{1}{5}e^{2x} \end{bmatrix}$$