Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 A – Test 2 – V.1

Professeur : Abdelkrim El basraoui

17 Octobre 2016

Nom :______________________________ **Prénom** :____________________________

Numéro d'étudiant :__________________

Intructions:

- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé.
- Les questions 1 et 2 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 3 à 5 valent 6 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 6 est une question bonus qui vaut 3 points. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 6, votre solution doit être totalement correcte.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les étteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ____________________________

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tabeau.

Question 1	Question 2

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 23

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
$U = \{(x-y,\ x+y,\ x-y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$V = \{(x,\ y,\ -y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$W = \{(x^2,\ y,\ x+y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$
$X = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\}$

A. Seulement U et V
B. Seulement U et W
C. Seulement W et X
D. Seulement U, W et X
E. Seulement U, V et X
F. Seulement V et W

2. Parmis les énnoncés suivants le ou lesquel(s) est/sont vrais?

I. L'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.

II. L'ensemble $\{(1, 2)\}$ engendre une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

III. Si dans un espace vectoriel V tout vecteur est combinaison linéaire de u et $u + v + w$ alors les vecteurs $\{u, v, w\}$ de V engendrent V.

IV. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ engendre $\mathbb{M}_{22}$.

V. L'ensemble $\{(1, 0, 1), (0, 2, 3)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$.

A. Seulement I
B. Seulement II
C. Seulement II et III
D. Seulement IV et V
E. Seulement I, II, IV, et V
F. Tous les énnoncés.

3. Soit le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

a) Expliquez **en une phrase** pourquoi W est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. (*Vous n'avez pas à utiliser les critères du test des sous-espaces.*)

b) Trouvez un ensemble de vecteurs qui engendre W.

c) En déduire une base pour W.

d) Donnez une interprétation géometrique complète de W.

4. Dans $\mathbb{M}_{2\,2}$, l'espace des matrices 2 et entrées rééelles, soit

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\,2} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) <u>Vérifiez</u> que U est fermé pour l'addition, <u>ou bien</u> exprimez U sous une forme qui montre que U est une sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2\,2}$.)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b).

(Justifiez vos réponses.)

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

RÉPONSE: $\boxed{}$

b) Si V est un espace vectoriel et si $\{v_1, v_2\}$ engendre V, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ engendre V pour tout vecteur v_3 de V.

RÉPONSE: $\boxed{}$

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\,2} \mid a + c = 0 \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2\,2}$.

RÉPONSE:

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\dim U = 3$.

RÉPONSE:

6. [Bonus/Défit] Soient les vecteurs u, v, w **non-nuls** de $\mathbb{R}^{2016}$. Si (les produits scalaires sont nuls) $u \cdot v = u \cdot w = v \cdot w = 0$, montrez que $\{u, v, w\}$ est linéairement indépendant.
Notez que vous ne pouvez pas montrer ceci juste pour un choix particulier de u, v et w. Votre explication doit justifier pourquoi ceci est vrai pour tout les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^{2016}$. Notez que les arguments géométriques, tel que "*les vecteurs ne sont pas coplanaires, etc...*", ne sont pas acceptés.

(Page supplémentaire. V.1)