



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Examen partiel (pratique) pour MAT 2777 (Hiver 2017) Probabilités et statistique pour ingénieurs.

Durée: 80 minutes

Professeur: G. Lamothe

Nom: ..

Numéro d'étudiant: ..

Les calculatrices sont permises. C'est un examen à livre fermé.
Une feuille de formule (à 2 côtés) est permise.
Il y a 2 questions à réponses courtes et 6 questions à choix multiples.
L'examen est corrigé sur un total de 14 points.

Ecrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau suivant.

Question	Réponse
1	
2	
3	
4	
5	
6	

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Questions à réponses courtes

- [4] 1. La fonction de densité de de probabilité de la masse (en kg) d'un colis délivré par un bureau de poste est

$$f(x) = \begin{cases} 70/(69x^2), & 1 < x < 70 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) Quelle est la probabilité que la masse d'un colis sera plus que 45 kg?
- (b) Déterminer la masse espérée (en kg) d'un colis.
- (c) Déterminer l'écart type de la masse (en kg) d'un colis.
- (d) Si le coût de livraison est 5,25\$ par kg, quel est le coût moyen de livraison d'un colis?

solution: Soit X la masse d'un colis (en kg).

- (a) On veut

$$P(X > 45) = \int_{45}^{\infty} f(x) dx = \int_{45}^{70} 70/(69x^2) dx = \left[\frac{-70}{69x} \right]_{45}^{70} = 0,0081.$$

- (b) La masse espérée d'un colis en kg est

$$E[X] = \int_{\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{70} 70/(69x) dx = \left[\frac{70}{69} \ln(x) \right]_1^{70} = 4,3101.$$

- (c) On calcul

$$E[X^2] = \int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{70} 70/69 dx = 70.$$

L'écart type de la masse (en kg) est

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]} = \sqrt{E[X^2] - \mu_X^2} = \sqrt{70 - (4,3101)^2} = 7,1710.$$

- (d) Le coût moyen d'une livraison (en \$) est $E[5,25 X] = 5,25 (4,3101) = \$22,628$.

- [4] 2. Supposons que, dans une usine de fabrication de puces de circuits intégrés, 15 % des puces sont défectueuses, et que nous sélectionnons des puces au hasard dans la production de l'usine.
- Si 10 puces sont sélectionnées, quelle est la probabilité qu'au plus une de ces puces soit défectueuse?
 - Si 8 puces sont sélectionnées, quelle est la probabilité qu'exactly deux puces fonctionnent (c'est-à-dire ne sont pas défectueuses)?
 - Quelle est la probabilité que la troisième puce défectueuse sera la 19^{ème} puce sélectionnée?
 - Combien de puces espérez-vous avoir sélectionner lorsque vous observez la première puce défectueuse?
 - Combien de puces défectueuses espérez-vous observer dans une sélection de 10 puces?

Solution:

- (a) Soit X le nombre de puces défectueuses parmi $n = 10$. Alors, X suit une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,15$. On veut

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 1) &= \binom{10}{0} 0,15^0 0,85^{10} + \binom{10}{1} 0,15^1 0,85^9 \\
 &= 0,196874 + 10(0,15)(0,231617) = 0,5443.
 \end{aligned}$$

- (b) Soit X le nombre de puces défectueuses parmi $n = 8$. Alors, X suit une loi binomiale avec $n = 8$ et $p = 0,15$. On veut

$$P(X = 6) = \binom{8}{6} 0,15^6 0,85^2 = 0,0002304.$$

- (c) Soit X le nombre de puces sélectionnées requise pour observer la troisième puce défectueuse. Alors suit une loi binomiale négative (aussi dite de Pascal) avec $r = 3$ et $p = 0,15$. On veut

$$P(X = 19) = \binom{19-1}{3-1} 0,15^3 0,85^{16} = 0,03834.$$

- (d) Soit X le nombre de puces sélectionnées requise pour observer la première puce défectueuse. X suit une loi géométrique avec $p = 0,15$. On veut

$$E[X] = \frac{1}{p} = 6,66667.$$

- (e) Soit X le nombre de puces défectueuses parmi $n = 10$. Alors, X suit une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,15$. On veut

$$E[X] = np = 10(0,15) = 1,5.$$

Question à choix multiples

Écrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau qui se trouve sur la première page.

- [1] 1. La loi de probabilité conjointe pour X et Y est fournie dans le tableau suivant.

x	y	$P(X = x, Y = y)$
3	0	1/45
4	0	2/45
5	0	5/45
3	1	8/45
4	1	6/45
5	1	7/45
3	2	3/45
4	2	9/45
5	2	4/45

Quelle est la probabilité que X soit égale à 5 étant donné que Y soit égale à 1.

$$P(X=5|Y=1) = \frac{P(X=5 \cap Y=1)}{P(Y=1)}$$

- A) 0,4667 B) 0,3111 C) 0,1556 D) 0,3333 E) 0,4375

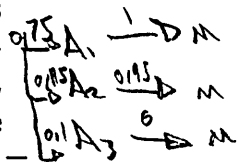
Solution: $P(X = 5|Y = 1) = P(\{X = 5\} \cap \{Y = 1\}) / P(Y = 1) = \frac{7/45}{8/45 + 6/45 + 7/45} = 7/21 = 0,3333.$

- [1] 2. Considérons un processus de fabrication de soupapes de moteur. Toutes les soupapes sont soumises à une première affûtage. Si l'épaisseur de la soupape conforme aux spécifications, elle est alors prête pour l'installation. Si l'épaisseur est trop grande, alors la soupape est réaffûtée. Si l'épaisseur est trop faible, alors la soupape est mise au rebut. Supposons qu'après une première affûtage, 75 % des soupapes répondent aux spécifications, 15 % sont réaffûtées et 10 % sont mises au rebut. En outre, supposer que parmi les soupapes qui sont réaffûtées, 95 % sont conformes aux spécifications, et 5 % sont mises au rebut. Trouver la probabilité qu'une soupape sera conforme aux spécifications (après la première ou la deuxième affûtage).

A) 0,7975 B) 0,8925 C) 0,7125 D) 0,9225 E) 0,8403

Solution:

Considérons la partition suivante de l'ensemble d'échantillonnage : A_1, A_2, A_3 , où A_1 est l'événement que la pièce est conforme aux spécifications après la première affûtage, A_2 l'événement que la pièce sera réaffûtée après la première affûtage, et A_3 l'événement que la pièce est mise au rebut après la première affûtage. Soit M l'événement que la pièce est conforme aux spécifications (soit après la première ou la deuxième affûtage). On a $P(A_1) = 0,75$; $P(A_2) = 0,15$; $P(A_3) = 0,10$; $P(M|A_1) = 1$, $P(M|A_2) = 0,95$ and $P(M|A_3) = 0$. Par la formule des probabilités totales, on a



$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(M|A_1)P(A_1) + P(M|A_2)P(A_2) + P(M|A_3)P(A_3) \\
 &= (1)(0,75) + (0,95)(0,15) + 0(0,1) \\
 &= 0,8925
 \end{aligned}$$

- [1] 3. Supposons que chacun de vos appels à une station de radio populaire a une probabilité de 0,02 de connexion (c.-à-d. de ne pas obtenir un signal d'occupation). Supposons que vos appels sont indépendants. Quelle est la probabilité que votre premier appel qui se connecte est votre dixième appel?

A) 0,0741 B) 0,0167 C) 0,817 D) 0,183 E) 0,1677

*Soit X le no d'appels pour une connexion
 Alors X suit une loi géométrique avec p=0.02
 On veut P(X=10) = (1-p)^(x-1) * p*

Solution: Soit X le nombre d'appels pour une connexion. Alors, X suit une loi géométrique avec $p = 0,02$. On veut $P(X = 10) = (0,98)^9(0,02) = 0,0167$.

- [1] 4. Nous écrivons un programme informatique pour générer des mots de passe de 8 caractères. Chaque caractère peut être l'une de 26 lettres ou de 10 chiffres (c'est-à-dire une de 36 caractères possibles équiprobables). Supposons qu'il existe une condition que le mot de passe doit avoir au moins un chiffre. Quelle est la probabilité que notre générateur de mot de passe produira un mot de passe valide?

A) 0,074 B) 0,722 C) 0,948 D) 0,052 E) 0,926

solution: Par le principe de multiplication, le générateur de mot de passe peut générer 36^8 différents mots de passe, chacun ayant la même chance d'être généré. Parmi ces mots de passe, il y a 26^8 mots de passe qui ne contiennent pas de chiffres. Alors la probabilité que notre générateur de mot de passe produira un mot de passe qui n'est pas valide est $26^8/36^8 = 0,074$. En d'autres mots, il va produire un mot de passe valide avec une probabilité de $1 - 0,074 = 0,926$.

- [1] 5. Un programmeur aura son travail évalué en ayant 100 lignes de son code choisies au hasard et vérifiées. La variable aléatoire X , représentant le nombre d'erreurs dans les 100 lignes de code, a la loi de probabilité suivante.

x	2	3	4
$p_X(x)$	0,5	0,3	0,2

Si l'employeur paie le programmeur un bonus de 500 dollars moins 3.5 dollars pour chaque erreur trouvée, alors quelle est le bonus espéré pour ce programmeur, en dollars?

$E[500 - 3,5X]$

A) 490,55 B) 400 C) 333,33 D) 425 E) 347,23

$$E[500 - 3,5X] = 500 - 3,5 E[X] = 500 - 3,5(2,7) = 490,55 \$$$

$$E[X] = 2(0,5) + 3(0,3) + 4(0,2) = 2,7$$

Solution: On veut

$$E[500 - 3,5 X] = 500 - 3,5 E[X] = 500 - 3,5(2,7) = 490,55$$

$$\text{où } E[X] = (2)(0,5) + (3)(0,3) + (4)(0,2) = 2,7.$$

- [1] 6. Chaque élément est testé par deux ingénieurs de contrôle de qualité. Si un défaut est présent, le premier inspecteur va l'identifier avec une probabilité de 0,95, tandis que le second inspecteur va l'identifier avec une probabilité de 0,75. Si le défaut est présent, supposons que les conclusions des inspecteurs sont indépendants l'un de l'autre. Chaque inspecteur test un élément avec un défaut, qu'elle est la probabilité qu'au moins un des deux ingénieurs de contrôle de la qualité va identifier le défaut?

A) 0,7125 B) 0,9957 C) 0,9875 D) 0,9753 E) 0,8753

Solution: Soit F_i l'événement que l'inspecteur i identifie un défaut pour $i = 1, 2$. On veut

$$\begin{aligned} P(F_1 \cup F_2) &= P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \\ &= 0,95 + 0,75 - (0,95)(0,75) \quad \text{par indépendance} \\ &= 0,9875 \end{aligned}$$

$$P(F_1 \cup F_2) = 1 - P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = 1 - (0,05)(0,25) = 0,9875$$

Examen Partiel Pratique pour MAT 2777
Probabilités et statistique pour ingénieurs.

Questions à réponses courtes

[4] 1.

La fonction masse de probabilité pour X , le nombre d'imperfections par 10 mètres d'un tissu synthétique est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	c	c	$2c$	$2c$	c	$c/2$

$$1 = \sum_{x=0}^5 p_X(x) = \frac{15c}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{15}$$

- (a) Déterminer c tel que p_X est une fonction masse de probabilité.
- (b) Calculer le nombre espéré et la variance du nombre d'imperfections pour 10 mètres de ce tissu synthétique. $E[X] = \sum_{x=0}^5 x p_X(x) = 7,3$ } $V[X] = 7,4 - (7,3)^2$
- (c) Calculer $P(|X - 2| < 1)$. $E[X^2] = \sum_{x=0}^5 x^2 p_X(x) = 7,4$ } $= 88/45$
- (d) Calculer $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$, où μ et σ est la moyenne et l'écart type du nombre d'imperfections pour 10 mètres de ce tissu synthétique, respectivement.

solution :

- (a) Résoudre

$$1 = \sum_{x=0}^5 p_X(x) = \frac{15c}{2}$$

pour c , nous donne $c = 2/15$.

- (b) On veut

$$E[X] = \sum_{x=0}^5 x p_X(x) = \frac{35}{15} = 2,3333$$

and

$$\text{Var}[X] = \left(\sum_{x=0}^5 x^2 p_X(x) \right) - \left(\sum_{x=0}^5 x p_X(x) \right)^2 = \frac{88}{45} = 1,9556.$$

- (c)

$$P(|X - 2| < 1) = P(X = 2) = 4/15$$

(d)

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-0,4635 \leq X \leq 5,1302) = \sum_{x=0}^5 p_X(x) = 1$$

[4] 2.

La fonction masse de probabilité conjointe de X et Y est donnée dans le tableau ci-bas :

x	y	$p_{XY}(x, y)$	x	$P_X(x)$	y	$P_Y(y)$
1	1	1/4	1	1/4	1	1/4
1,5	2	1/8	1,5	3/8	2	1/8
1,5	3	1/4	1,5	1/4	3	1/4
2,5	4	1/4	3	1/8	4	1/4
3	5	1/8			5	1/8

(a) Déterminer les probabilités suivantes :

(i) $P(\{X < 2,5\} \cap \{Y < 3\})$; (ii) $P(Y > 2,8 | X = 1,5)$.

(b) On a $E[Y] = 2,875$. Calculer $E[X]$ et $E[2X - 3Y]$.

(c) Si $V[X] = 0,496$ et $V[Y] = 1,859$, calculer $V[X + Y]$.

(d) Est-ce que X et Y sont indépendentes? Pourquoi?

solution : (a) (i)

$$P(\{X < 2,5\} \cap \{Y < 3\}) = p_{XY}(1;1) + p_{XY}(1,5;2) = 3/8 = 0,375.$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(Y > 2,8 | X = 1,5) &= \frac{P(\{Y > 2,8\} \cap \{X = 1,5\})}{P(X = 1,5)} \\ &= \frac{p_{XY}(1,5;3)}{p_{XY}(1,5;2) + p_{XY}(1,5;3)} \\ &= \frac{2/8}{3/8} = 0,6667. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(Y > 2,8 | X = 1,5) \\ &= \frac{P(Y > 2,8) \cap P(X = 1,5)}{P(X = 1,5)} \\ &= \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}$$

(b) Les lois marginaux pour X et pour Y sont respectivement :

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4; & x=1 \\ 3/8; & x=1,5 \\ 1/4; & x=2,5 \\ 1/8; & x=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/4, & y=1 \\ 1/8, & y=2 \\ 1/4, & y=3 \\ 1/4, & y=4 \\ 1/8, & y=5 \end{cases}$$

Alors, $E[X] = 1(1/4) + (1,5)(3/8) + (2,5)(1/4) + (3)(1/8) = 1,8125$
 et $E[Y] = 1(1/4) + (2)(1/8) + (3)(1/4) + (4)(1/4) + (5)(1/8) = 2,875$.

On veut

$$\begin{aligned} E[2X - 3Y] &= E[2X + (-3Y)] = E[2X] + E[-3Y] \\ &= 2E[X] - 3E[Y] = -5. \end{aligned}$$

(c) Considérons le tableau suivant :

x	y	$p_{XY}(x, y)$	$xy p_{XY}(x, y)$
1	1	1/4	1/4
1,5	2	1/8	$5/8 \cdot \frac{3}{8}$
1,5	3	1/4	9/8
2,5	4	1/4	10/4
3	5	1/8	15/8
Total			6,375

$$\left(\begin{aligned} &(1)(1)(\frac{1}{4}) + (1,5)(2)(\frac{1}{8}) + (1,5)(3)(\frac{1}{4}) \\ &+ (2,5)(4)(\frac{1}{4}) + (3)(5)(\frac{1}{8}) \\ &\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{8} + \frac{5}{2} + \frac{15}{8} = 6,125 \end{aligned} \right)$$

Calculons la covariance entre X et Y :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 6,375 - (1,8125)(2,875) = 1,1641.$$

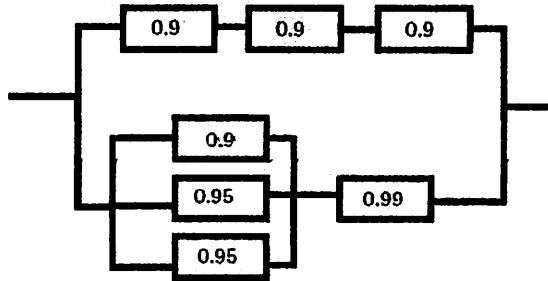
Alors,

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2 \text{Cov}(X, Y) = 0,496 + 1,859 + 2(1,1641) = 4,6832.$$

(d) $\text{Cov}[X, Y] \neq 0$, alors X et Y sont dépendants.

Question à choix multiples

- [1] 1. Le circuit suivant fonctionne que s'il existe un chemin de dispositifs fonctionnels de gauche à droite. Pour chaque dispositif, la probabilité que l'appareil fonctionne est indiqué dans le diagramme. Supposons que les appareils sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que le circuit fonctionne ?



- (A) 0,5357 (b) 0,9986 (C) 0,9972 (D) 0,9921 (E) 0,8777

- * [1] 2. Soient A, B et C trois événements indépendants tel que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,2$ et $P(C) = 0,3$. Déterminer la probabilité qu'au moins un des événements A, B et C sera réalisé.

- (A) 0,03 (B) 1 (C) 0 (D) 0,72 (E) 0,28.

- * [1] 3. Soit X une variable aléatoire avec une moyenne positive tel que

$$V[X] = 10 \quad \text{et} \quad E[(X - 5)^2] = 59.$$

Déterminer la valeur espérée de X .

- (A) 5 (B) 20 (C) -10 (D) 10 (E) 30

$$E[(X-5)^2] = E[X^2 - 10X + 25] = E[X^2] - 10E[X] + 25 \quad || \quad E[X^2] - 10E[X] + 25 = 59 \Rightarrow E[X^2] - 10E[X] = 34$$

$$V[X] = E[X^2] - \mu(X)^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 10 \Rightarrow E[X^2] = 10 + (E[X])^2$$

$$10 + (E[X])^2 - 34 + 10E[X] \Rightarrow 0 = E[X]^2 - 10E[X] - 24 \Rightarrow (E[X] - 12)(E[X] + 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} E[X] = 12 \\ E[X] = -2 \end{array} \right\} E[X] > 0 \text{ donc } E[X] = 12$$

$$A_1 = (0,9)^3 = 0,729$$

$$A_2 = 1 - (0,1)(0,05)^2 = 0,9975$$

$$A_3 = A_2 \cdot 0,99 = 0,997525$$

$$A_4 = 1 - (1 - A_1)(1 - A_3) = 1 - (0,271)(0,002475) \\ = 0,997222927 \approx 0,9972$$

$$P(A) \cup P(B) \cup P(C)$$

$$= 1 - (P(A) \cap P(B) \cap P(C))$$

$$= 1 - (0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,3) = 0,72$$

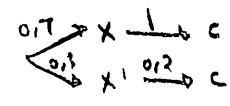
réponse correcte

$X = \text{connaît la réponse}$

$X' = \text{connaît pas la réponse}$

$$P(X|C) = \frac{P(X \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|X) \cdot P(X)}{P(C|X)P(X) + P(C|X')P(X')}$$

$$= \frac{(1)(0,7)}{(1)(0,7) + (0,2)(0,3)} = 0,921$$



$P(C|X) = 1$
 $P(C|X') = 0,2$

$P(X|C) = ?$
 $= \frac{P(X \cap C)}{P(C)}$
 $= \frac{P(C|X) \cdot P(X)}{P(C)}$

$P(C) = P(X \cap C) + P(X' \cap C)$
 $P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$
 $P(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C|B)}$

- [1] 4. En réponse à une question sur un test à choix multiples, soit que l'étudiant(e) connaît la réponse ou soit que l'étudiant(e) devine. Soit $p = 0,7$ la probabilité que l'étudiant(e) connaît la réponse et $q = 0,3$ la probabilité que l'étudiant(e) devine. Supposons qu'un étudiant(e) qui devine la réponse sera correcte avec une probabilité de 0,2 (il y a 5 choix et un d'entre eux est correct). Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un étudiant(e) connaisse la réponse à une question, étant donné qu'il ou elle a répondu correctement ?

$0,7 \begin{cases} C \xrightarrow{1} B \\ C' \xrightarrow{0,2} B \end{cases}$
 $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C) \cdot P(C)}{P(B)}$
 $= \frac{0,7}{0,76}$

- (A) 0,421 (B) 0,427 (C) 0,2 (D) 0,921 (E) 0,6
 $P(B) = P(B|C) \cdot P(C) + P(B|C') \cdot P(C') = (1 \cdot 0,7) + (0,2 \cdot 0,3) = 0,76$

- [1] 5. Dans une suite de tests indépendants de circuits intégrés, chaque circuit est rejeté avec une probabilité de 0,2. Dans un échantillon de taille $n = 20$, trouver la probabilité qu'au moins deux circuits intégrés sont rejetés ? $P(X \geq 2) = 1 - [\binom{20}{1}(0,2)^1(0,8)^{19} + \binom{20}{0}(0,2)^0(0,8)^{20}] = 0,9368$

- (A) 0,435 (B) 0,931 (C) 0,251 (D) 0,352 (E) 0,558.

- [1] 6. Nous savons que 10 % des composants d'un lot particulier de 50 composants sont défectueux. Nous sélectionnons cinq composants au hasard de ce lot de 50 composants. Quelle est la probabilité que notre échantillon ait exactement 1 composant défectueux.

$10 = 5$
 $\frac{\binom{45}{4} \binom{5}{1}}{\binom{50}{5}} = 0,3516$

- (A) 0,352 (B) 0,029 (C) 0,100 (D) 0,455 (E) 0,055

- [1] 7. La durée de vie en heures d'une certaine sorte de tube pour radio est une variable aléatoire ayant une fonction de densité de probabilité donnée par

$$f(x) = \frac{100}{x^2}, \quad x > 100.$$

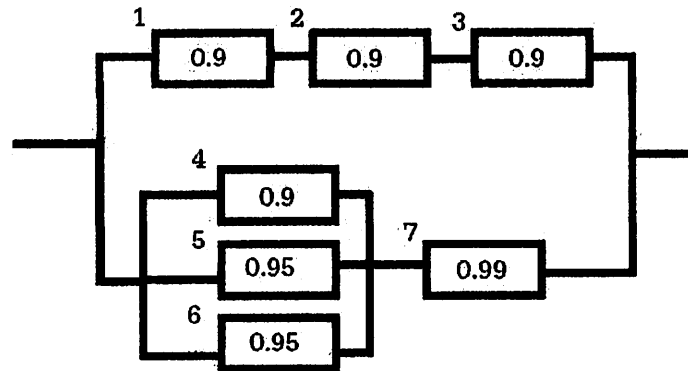
Calculer la probabilité que la durée de vie soit inférieure à 175 heures

- (A) 0,5321 (B) 0,0100 (C) 0,6473 (D) 0,1222 (E) 0,4286

$$\int_{100}^{175} \frac{100}{x^2} = \left[-\frac{100}{x} \right]_{100}^{175} = 0,4286$$

$(P(A) \cup P(B) \cup P(C)) = 1 - \text{Nécessairement}$

1. On étiquette les composants.



Définir E_i ="composant i fonctionne". On décompose le circuit en sous-circuits.

Considérons 1, 2 et 3 qui sont assemblés en séries. On étiquette ce composant 8. Alors

$$P(E_8) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = (0,9)^3 = 0,729.$$

Considérons les composants 4, 5 et 6 qui sont assemblés en parallèle. On étiquette ce composant 9. Alors,

$$\begin{aligned} P(E_9) &= P(E_4 \cup E_5 \cup E_6) \\ &= 1 - P(E'_4)P(E'_5)P(E'_6) \\ &= 1 - (0,1)(0,05)(0,05) = 0,99975. \end{aligned}$$

Considérons les composants 9 et 7 qui sont assemblés en série. On étiquette ce dernier 10. Alors

$$P(E_{10}) = P(E_9 \cap E_7) = P(E_9)P(E_7) = (0,99975)(0,99) = 0,9897525.$$

Le circuit se compose des composants 10 et 8 en parallèle. Alors, la probabilité que le circuit fonctionne est

$$P(E_8 \cup E_{10}) = 1 - P(E'_8)P(E'_{10}) = 1 - (1 - 0,729)(1 - 0,9897525) = 0,9972.$$

2. On veut

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - (0,5)(0,8)(0,7) = 0,72$$

La réponse est (D).

3. Puisque

$$59 = E[(X-5)^2] = E[X^2] - 10E[X] + 25 \text{ et } 10 = \text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2,$$

alors par soustraction des deux équations, on obtient $49 = -10E[X] + (E[X])^2 + 25$, ou l'équation équivalente

$$0 = (E[X])^2 - 10E[X] - 24 = (E[X] - 12)(E[X] + 2).$$

Alors, $E[X] = 12$ ou $E[X] = -2$. Mais, $E[X] > 0$, donc $E[X] = 12$.
La réponse est (B). ?

4. Soit C l'événement que la réponse soit correcte et D l'événement que l'étudiant a deviné. On a $P(G) = 0,3$ et $P(G') = 0,7$. En outre, on a $P(C|G) = 0,2$ et $P(C|G') = 1$, puisque l'étudiant va obtenir la bonne réponse si l'étudiant connaît la bonne réponse. On veut

$$\begin{aligned} P(G'|C) &= \frac{P(G' \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|G')P(G')}{P(C|G')P(G') + P(C|G)P(G)} \\ &= \frac{(1)(0,7)}{(1)(0,7) + (0,2)(0,3)} = 0,921 \end{aligned}$$

La bonne réponse est D.

5. Soit X le nombre de circuits rejetés parmi les $n = 20$ circuits. X suit une loi binomiale avec $n = 20$ et $p = 0,2$. On veut

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\binom{20}{0} (0,2)^0 (0,8)^{20} + \binom{20}{1} (0,2)^1 (0,8)^{19} \right] = 0,931.$$

6. La probabilité que notre échantillon contient exactement une pièce défectueuse est

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{45}{4}}{\binom{50}{5}} = 0,3516.$$

7. La probabilité que la durée de vie sera moins que 175 heures est

$$\int_{100}^{175} \frac{100}{x^2} dx = 100 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{100}^{175} = 0,4286$$



Université d'Ottawa - University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Examen partiel pour MAT 2777 (Hiver 2017) Probabilités et statistique pour ingénieurs.

Durée : 80 minutes

Professeur : G. Lamothe

Nom :

d'étudiant :

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Les calculatrices sont permises. C'est un examen à livre fermé. Une feuille de formule (à 2 côtés) est permise. Il y a 2 questions à réponses courtes et 6 questions à choix multiples. L'examen est corrigé sur un total de 14 points.

Ecrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau suivant.

Question	Réponse	Question	Réponse
1	F	4	A ✓
2	B	5	A ✓
3	E ✓	6	C ✓

4

11/14

Questions à réponses courtes

1. Une compagnie d'approvisionnement en produits chimiques envoie un certain solvant dans des fûts de 10 gallons. Soit X le nombre de fûts commandés par un client choisi au hasard. Supposons que X ait la fonction de masse de probabilité suivante :

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,4; & x = 1 \\ 0,2; & x = 2 \\ 0,2; & x = 3 \\ 0,1; & x = 4 \\ 0,1; & x = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,4 & 1 \leq x < 2 \\ 0,6 & 2 \leq x < 3 \\ 0,8 & 3 \leq x < 4 \\ 0,9 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$

- [1] (a) Calculer la probabilité que plus de 3 fûts soient commandés, c'est-à-dire calculer $P(X > 3)$.
- [1] (b) Donner le nombre espéré de fûts commandés.
- [1] (c) Calculer l'écart type du nombre de fûts commandés.
- [2] (d) Supposons que le coût (en dollars) de livraison d'une commande soit $C = 100X + 25$. C'est 100\$ par fût plus un coût fixe supplémentaire de 25\$ pour la commande. Calculer la moyenne et l'écart type pour le coût de livraison pour une commande.

a) $P(X > 3) = P(X=4) + P(X=5) = 0,1 + 0,1 = 0,2 = P(X > 3)$

b) $E[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x) = (1)(0,4) + (2)(0,2) + (3)(0,2) + (4)(0,1) + (5)(0,1) = 2,3 = E[X]$

c) $\sigma_X = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$

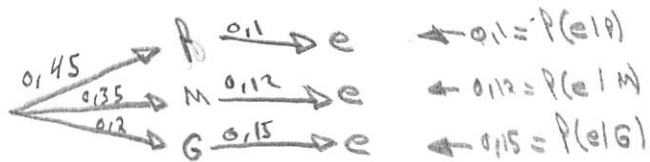
$E[X^2] = \sum_{x \in \Omega} x^2 p_X(x) = (1^2)(0,4) + (2^2)(0,2) + (3^2)(0,2) + (4^2)(0,1) + (5^2)(0,1) = 7,1$

$\sigma_X = \sqrt{7,1 - (2,3)^2} = 1,3454$

d) $E[100X + 25] = 25 + 100E[X] = 25 + 100(2,3) = 255$

$E[(100X + 25)^2] = E[10000X^2 + 5000X + 625] = 10000E[X^2] + 5000E[X] + 625 = 72775 = 10000(7,1) + 5000(2,3) + 625 = 72775$

$\sigma_{100X+25} = \sqrt{E[(100X+25)^2] - (E[100X+25])^2} = \sqrt{72775 - 255^2} = 134,54$



2. Les clients qui achètent une certaine marque de voiture peuvent commander un moteur choisi parmi trois tailles différentes. De toutes les voitures vendues, 45 % ont le moteur le plus petit, 35 % ont la taille moyenne, et 20 % ont le plus grand. Parmi les voitures avec le plus petit moteur, 10 % échouent un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat, alors que 12 % de ceux avec la taille moyenne et 15 % de ceux avec le plus grand moteur échouent un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat.

- [1] (a) Quelle est la probabilité qu'une voiture choisie au hasard échoue un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat et qu'elle ait le plus petit moteur?
- [1] (b) Quelle est la probabilité qu'une voiture choisie au hasard échoue un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat?
- [1] (c) Une voiture choisie au hasard échoue l'essai d'émissions dans les deux ans de l'achat. Quelle est la probabilité qu'elle ait le plus petit moteur?

$$a) P(e \cap P) = P(e|P) \cdot P(P) = (0,1)(0,45) = \underline{0,045 = P(e \cap P)}$$

$$b) P(e) = P(e|P)P(P) + P(e|M)P(M) + P(e|G)P(G) \\ = (0,1)(0,45) + (0,12)(0,35) + (0,15)(0,2) \\ \underline{P(e) = 0,117}$$

$$c) P(e|P) = \frac{P(e \cap P)}{P(e)} = \frac{0,045}{0,117} = 0,384615385$$

$$\underline{P(e|P) \approx 0,39}$$

Questions à choix multiples

$$0,3 + 0,4 - (0,4)(0,7) + 0,1$$

Ecrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau qui se trouve sur la première page.

- [1] 1. La probabilité qu'un sous-marin ait une mauvaise hélice est 0,3, la probabilité qu'il ait un mauvais périscope est 0,4, et la probabilité qu'il ait les deux défauts est 0,1.

$$P(\text{mauv} \cap \text{péris})$$

$$= 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

Quelle est la probabilité que le sous-marin ait une mauvaise hélice mais un bon périscope?

$$P(A) = 0,3$$

$$P(B) = 0,4$$

$$P(A \cap B) = 0,1$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0,3 - 0,1 = 0,2$$

- A) 0,1 B) 0,12 C) 0,2 D) 0,4 E) 0,5 F) 0,3

- [1] 2. Nous programmons un ordinateur pour générer un NIP à 4 chiffres au hasard, permettant des chiffres répétés. Les chiffres sont choisis dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. En supposant que tous les NIPs à 4 chiffres possibles sont équiprobables, quelle est la probabilité que le programme va générer un NIP à 4 chiffres sans chiffres répétés, c'est-à-dire que nous obtenons 4 chiffres distincts?

- A) $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) / (10 \times 9 \times 8 \times 7)$
 B) $\binom{6}{4} / \binom{10}{4}$
 C) $\binom{10}{4} / (10 \times 9 \times 8 \times 7)$
 D) $\binom{10}{4} / 10^4$
 E) $(10 \times 9 \times 8 \times 7) / 10^4$

- [1] 3. Soit R l'événement que le radar d'un avion fonctionne, et soit G l'événement que le GPS de l'avion fonctionne. Nous savons que R et G sont indépendants. Nous savons aussi que $P(R) = 0,7$ et $P(G) = 0,9$. L'avion a besoin d'un radar fonctionnant ou d'un GPS fonctionnant pour trouver son chemin la nuit (il suffit d'avoir au moins un de ces deux instruments fonctionnant pour que l'avion trouve son chemin). Quelle est la probabilité que l'avion puisse trouver son chemin la nuit?

- A) 0,03 B) 0,75 C) 0,99 D) 0,85 E) 0,97

$$P(R \cup G) = 1 - P(\bar{R} \cap \bar{G})$$

$$= 1 - (0,3)(0,1)$$

$$= 0,97$$

$$1 = \int_0^1 k(x+x^2) dx = k \int_0^1 x dx + k \int_0^1 x^2 dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = k \left(\frac{5}{6} \right)$$

$$1 = k \left(\frac{5}{6} \right) \Rightarrow k = \frac{6}{5} \Rightarrow k = \frac{6}{5}$$

$$P(X > 0,5) = \int_{0,5}^1 \left(\frac{6}{5} \right) (x+x^2) dx = \frac{6}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0,5}^1 + \frac{6}{5} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0,5}^1 = \frac{6}{5} (0,375 + 0,212) = 0,8$$

- [1] 4. La concentration d'un réactif est une variable aléatoire avec la fonction de densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x+x^2), & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que la concentration soit supérieure à 0,5?
(Astuce : Vous devrez d'abord trouver la valeur de la constante k .)

- (A) 0,8 B) 0,75 C) 0,5 D) 0,25 E) 0,2

- [1] 5. Considérons la fonction de masse de probabilité conjointe suivante :

x	y	$p_{XY}(x, y)$
1	1	5/20
1	2	1/20
2	1	2/20
2	3	3/20
3	1	3/20
3	2	1/20
3	3	5/20

$$V[3X+5Y] = (3^2)V[X] + (5^2)V[Y] + 2(3)(5)\text{Cov}(X,Y)$$

$$= 9(0,7275) + 25(0,89) + 30(0,365)$$

$$= 34,7475 \approx 40$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = 4,45$$

$$\text{Cov}(X,Y) = 4,45 - (2,15)(1,9)$$

$$= 0,365$$

Nous avons calculé :

$$E[X] = 2,15; \quad E[Y] = 1,9; \quad V[X] = 0,7275; \quad V[Y] = 0,89,$$

Déterminer $V[3X + 5Y]$, arrondie au plus proche entier.

- (A) 40 B) 25 C) 82 D) 7 E) 24

- [1] 6. Une grande entreprise industrielle permet un escompte sur toute facture payée dans un délai d'un mois. De toutes les factures, 10% reçoivent l'escompte. Dans une vérification d'entreprise, 12 factures sont sélectionnées au hasard. Quelle est la probabilité qu'au plus 1 des 12 factures dans l'échantillon ait reçu l'escompte?

- A) 0,3766 B) 0,1667 (C) 0,6590 D) 0,7665 E) 0,5795

fait X le nbr de factures escomptées.

X suit une loi binomiale avec $p = 0,1$ et $n = 12$

$$P(X \leq 1) = \binom{12}{1} p^1 (1-p)^{11} + \binom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} = 12(0,1)(0,9)^{11} + 1(1)(0,9)^{12}$$

$$= 0,65902251 \approx 0,6590$$