

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 1

Mardi 31

Echeance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le ~~jeudi 26~~ ^{jeudi 26} janvier 2017
Il y a 6 questions

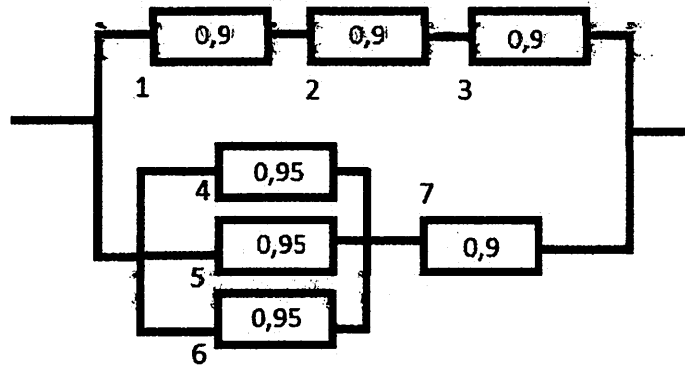
Veuillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

- Les probabilités sont 85%, 37%, et 25% que, bien que sous la garantie, une nouvelle voiture nécessite des réparations sur le moteur, la transmission, ou les deux, respectivement.
 - Quelle est la probabilité qu'une voiture faudra au moins un des deux types de réparations sous la garantie?
 - Quelle est la probabilité qu'une voiture ne nécessite pas de réparation du moteur et ne nécessite pas de réparation de la transmission sous la garantie?
 - Quelle est la probabilité qu'une voiture ne nécessite pas de réparations du moteur sous la garantie ou ne nécessite pas de réparations de la transmission sous la garantie?
- Les brins de fils de cuivre d'un fabricant sont analysés pour la résistance et conductivité. Les résultats de 98 brins sont

	résistance		Total
	élevée	faible	
Conductivité élevée	73	5	78
Faible conductivité	16	4	20
Total	89	9	98

- Si un brin est choisi au hasard, quelle est la probabilité que sa conductivité est élevée et que sa résistance est élevée?
- Si un brin est choisi au hasard, quelle est la probabilité que sa conductivité est faible ou la résistance est faible?
- Etant donné qu'un brin sélectionné au hasard a une faible conductivité, quelle est la probabilité que le brin aura une faible résistance?
- Envisager l'événement qu'un brin ait une faible conductivité et l'événement que le brin ait une faible résistance. Ces événements sont-ils mutuellement exclusif?
- Envisager l'événement qu'un brin ait une faible conductivité et l'événement que le brin ait une faible résistance. Les données appuient-elles la conclusion que ces deux événements sont indépendants?

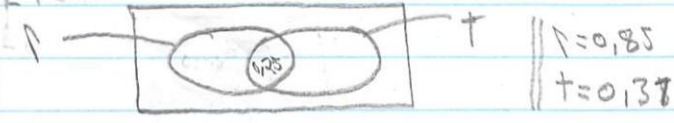
3. Référez à la Question 2. Supposons qu'on cueille au hasard 5 des 98 brins, sans remise.
- Quelle est la probabilité que tous les cinq ont une résistance élevée?
 - Quelle est la probabilité qu'au plus un des brins une résistance élevée?
- Une grande entreprise industrielle utilise trois motels locaux pour fournir des chambres d'hébergement pour ses clients. Il est connu que 21% des clients reçoivent des chambres au Ramada Inn, 49% au Sheraton et 30% au Lakeview Motor Lodge. Si la plomberie est défectueuse dans 4% des chambres du Ramada Inn, dans 3,5% des chambres du Sheraton, et dans 7,5% des chambres au Lakeview Motor Lodge, quelle est la probabilité
 - qu'un client sera affecté à une pièce avec une plomberie défectueuse?
 - qu'une personne ayant une chambre ayant une plomberie défectueuse a été assigné des hébergements au Lakeview Motor Lodge?
 - Le circuit suivant fonctionne si et seulement s'il y a un chemin de composants fonctionnels de gauche à droite. La probabilité que le composant fonctionne est indiquée dans le diagramme suivant. Supposons que les composants sont indépendants. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne?



6. Voici deux questions de dénombrement.

- (a) Un cadenas de marque Dudley a un cadran de 60 numéros (0, 1, 2, ..., 59). Pour déverrouiller le cadenas, on doit choisir trois numéros dans le bon ordre, en tournant l'aiguille à droite, puis à gauche (au moins un tour complet d'abord) et à droite. Par contre le même numéro ne peut arriver deux fois de suite, et le numéro suivant ne peut être un des deux numéros adjacents (à gauche et à droite) non plus. Combien y a-t-il de possibilités? (Par exemple 15, 48, 50 est une combinaison possible. 15, 16, 40 n'est pas une combinaison possible, puisque 15 est immédiatement suivie par un nombre adjacent. 15, 15, 40 n'est pas une combinaison possible, puisque 15 est immédiatement suivie par lui-même. Mais 15, 40, 15 est une combinaison possible. Attention : les nombres adjacents à 0 sont 1 et 59.)
- (b) Une institutrice au primaire a une boîte de bonbons avec 6 saveurs différentes, 4 bonbons de chaque sorte, distribue un bonbon au hasard un à la fois à chacun des 24 élèves de sa classe. Combien y a-t-il de façon de distribuer les 6 saveurs de bonbons aux 24 enfants?

1. P = une nouvelle voiture nécessite des réparations sur le moteur
T = "



a) $P(P \cup T) = ? \Rightarrow P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = 0,85 + 0,37 - 0,25$
 $P(P \cup T) = 0,97$

b) $P(P' \cap T) = ? \Rightarrow P(P \cap T) = 1 - P(P \cup T) = 1 - 0,97$
 $P(P \cap T) = 0,03$

c) $P(P' \cup T) = ? \Rightarrow P(P' \cup T) = 1 - P(P \cap T) = 1 - 0,25$
 $P(P' \cup T) = 0,75$

2. c_e = conductivité élevée ; c_f = conductivité faible
 r_e = résistance élevée ; r_f = résistance faible

	r_e	r_f	totale
c_e	73	5	78
c_f	16	4	20
totale	89	9	98

a) $P(c_e | r_e) = \frac{N(c_e \cap r_e)}{N(r_e)} = \frac{73}{89} \approx 0,8202 \approx 0,82$

b) $P(c_f \cup r_f) = \frac{N(c_f \cup r_f)}{N(\text{totale})} = \frac{(16+5+4)}{98} = \frac{25}{98} \approx 0,2551 \approx 0,26$

c) $P(r_f | c_f) = \frac{P(r_f \cap c_f)}{P(c_f)} = \frac{N(r_f \cap c_f)}{N(c_f)} = \frac{4}{20} = 0,2$

d) Selon ma définition une ou classe c_f et r_f sont mutuellement exclusives si $c_f \cap r_f = \emptyset$. Mais l'indice que $c_f \cap r_f = 4$ et non \emptyset , ces événements ne sont pas mutuellement exclusifs.

e) (I) $P(r_f) = \frac{9}{98} = 0,091836375 \approx 0,0918$

(II) $P(r_f | c_f) = [P(r_f \cap c_f) / P(c_f)] = (4/98) / (20/98) = 0,2$

(III) $P(r_f | c_f) \neq P(r_f) \Rightarrow r_f$ et c_f sont dépendants

3. a) X = la question de 3a ; sans remise \Rightarrow question de permutation (P_n^n).

$$P(X) = \frac{\binom{89}{98} \binom{88}{97} \binom{87}{96} \binom{86}{95} \binom{85}{94}}{\binom{98}{5}} = 0,61207685 \approx 0,6112 = 61,12\%$$

"probabilité de piger le premier jurin avec une résistance obtenue."
"premier" "cinquième"

b) Y = la question de 3b ; sans remise \Rightarrow question de permutation

$$P(Y) = \frac{\binom{89}{98} \binom{1}{97} + \binom{89}{97} \binom{1}{96}}{\binom{98}{5}} = 0,000670$$

4. A = hôtel qui reçoit des chambres au Canada Inn.

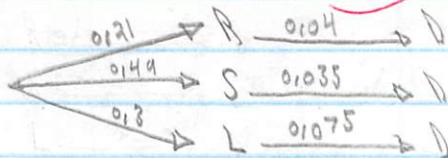
S = "

"Serraton.

L = "

"Lakemuir Motor Lodge.

D = plomberie défectueuse



a) $P(D) = P(AD) + P(SD) + P(LD)$

$$= P(D|A)P(A) + P(D|S)P(S) + P(D|L)P(L) = (0,04)(0,21) + (0,035)(0,49) + (0,075)(0,3)$$

$$P(D) = 0,04805 = 4,805\% \approx 4,81\%$$

b) $P(L|D) = \frac{P(LD)}{P(D)} = \frac{P(D|L)P(L)}{P(D)} = \frac{(0,075)(0,3)}{0,04805} = 0,46826227 \approx 46,83\%$

$$P(L|D) \approx 0,4683 = 46,83\%$$

5. Faire référence au diagramme de la question #5 du devoir pour une illustration plus claire de ce problème.

Soit A_i = comparant i fonctionnaires

$$\text{Soit } \begin{cases} A_3 = A_4 \cup A_5 \cup A_6 \\ A_9 = A_8 \cap A_7 \\ A_{10} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \\ A_{11} = A_9 \cup A_{10} \end{cases}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_7) = 0,9$$

$$P(A_9) = 1 - P(A_8) = 0,100125$$

$$P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = 0,95$$

$$P(A_{10}) = 1 - P(A_{10}) = 0,271$$

$$P(A_{11}) = P(A_7) = P(A_3) = P(A_7) = 0,1$$

$$P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = 0,05$$

$$P(A_8) = P(A_4 \cup A_5 \cup A_6) = 1 - P(A_4 \cap A_5 \cap A_6) = 1 - P(A_4)P(A_5)P(A_6) = 1 - (0,05)^3 = 0,999875$$

$$P(A_9) = P(A_8 \cap A_7) = P(A_8)P(A_7) = (0,999875)(0,9) = 0,8998875$$

$$P(A_{10}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (0,9)^3 = 0,729$$

$$P(A_{11}) = P(A_9 \cup A_{10}) = 1 - P(A_9 \cap A_{10}) = 1 - P(A_9)P(A_{10}) = 1 - (0,100125)(0,271) = 0,972869512 \approx 97,29\%$$

$$\hookrightarrow P(A_{11}) = P(\text{aucun fonctionnaire}) \approx 97,29\%$$

6. a) x = nombre de possibilités selon les critères de la question 6a

$$x = 60 \times 57 \times 57 = 194940$$

- 1^{er} # il y a 60 choix
 - 2^e # il y a 57 choix (60 - (le # du 1^{er} choix + les 2# adjacents de ce choix))
 - 3^e # il y a 57 choix (60 - (le # du 2^e choix + les 2# adjacents de ce choix)).
- o/b. les 3# valeurs pour le 2^e choix sont maintenues sans d'être choisies.
- selon la loi de permutation, chaque étape sont multipliées ensemble.

b) il y a 6 groupes de bancom avec 4 bancom de chaque carte → 24 totales (6 groupes de 4)

(ceci est une question de: ~~l'ordre est important → question de permutation~~
- l'ordre n'est pas important → question de combinaison)

x = nombre de possibilités selon les critères établis dans la question 6b

$$x = \binom{24}{4} \binom{20}{4} \binom{16}{4} \binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = (10626)(4845)(1820)(495)(70)(1) \approx 3,2467 \times 10^{15}$$

- l'ordre de choix des 4 bancom, par groupes de valeurs, parmi les 24 étudiants n'est pas important.
- on distribue les bancom aux étudiants par groupes de valeurs, ce qui définit notre étape ou on labore nos choix.
- finalement, on multiplie ce choix selon la règle de permutation pour obtenir la réponse finale.

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 2

Echance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le jeudi 9 février 2017
Il y a 5 questions

Veillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. La sortie d'un processus chimique est continuellement surveillée pour s'assurer que la concentration reste dans des limites acceptables. Chaque fois que la concentration va en dehors des limites, le processus est arrêté et recalibré. Soit X le nombre de fois dans une semaine donnée que le processus est recalibré. Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 0,17; & 0 \leq x < 1 \\ 0,53; & 1 \leq x < 2 \\ 0,84; & 2 \leq x < 3 \\ 0,97; & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases} \rightarrow p_X(x) = \begin{cases} 0,17; & x=0 \\ 0,36; & x=1 \\ 0,31; & x=2 \\ 0,13; & x=3 \\ 0,03; & x=4 \end{cases}$$

- (a) Quelle est la probabilité que le processus soit recalibré moins de deux fois pendant la semaine?
 (b) Quelle est la probabilité que le processus soit recalibré plus que trois fois au cours de la semaine?
 (c) Quelle est la probabilité que le processus soit recalibré exactement une fois pendant la semaine?
 (d) Quel est le nombre espéré de fois que le processus soit recalibré au cours de la semaine?
2. Voici la fonction masse de probabilité $p_X(x)$ pour une variable aléatoire discrète X :

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,4; & x = 4 \\ 0,3; & x = 6 \\ 0,2; & x = 8 \\ 0,1; & x = 10 \end{cases} \rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 4 \\ 0,4; & 4 \leq x < 6 \\ 0,7; & 6 \leq x < 8 \\ 0,9; & 8 \leq x < 10 \\ 1; & 10 \leq x \end{cases}$$

- (a) Déterminer $P(X = 6)$, $P(X \leq 7)$, et $P(X > 5)$
 (b) Quelle est la valeur espérée de $7 + 10X$?
 (c) Quelle est la valeur espérée de $1/X$?
3. Le temps d'attente, en minutes, entre excès de vitesse successifs repérés par une unité de radar est une variable aléatoire continue X muni de la fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3, \\ 1 - \frac{81}{x^4} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

- (a) Déterminer la fonction de densité de probabilité de X . $\rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
 (b) Déterminer la probabilité que le temps d'attente entre excès de vitesse successifs repérés est plus que 5 minutes mais moins que 10 minutes
 (i) en utilisant la fonction de répartition de X ,
 (ii) en utilisant la fonction de densité de probabilité de X .
 (c) Déterminer le temps d'attente espéré entre excès de vitesse successifs repérés.
 (d) Calculer l'écart type de X .

4. Voici la fonction masse de probabilité $p_X(x)$ pour une variable aléatoire discrète X :

$$p_X(x) = \begin{cases} p; & x = 0 \\ 2p; & x = 1 \\ 3p; & x = 2 \\ 5p; & x = 3 \end{cases}$$

- (a) Déterminer la valeur de p . (Indice : quelle est la probabilité totale?) (b) Déterminer la moyenne de X .
(c) Calculer l'écart type de X .
(d) Quelle est la valeur espérée de $100 - 10X$?
(e) Quelle est l'écart type de $100 - 10X$?
5. Les particules sont une composante majeure de la pollution atmosphérique dans de nombreuses régions. Nous voulons étudier la taille des particules contaminantes. Soit X le diamètre, en micromètres, d'une particule choisie au hasard. Supposons que dans une certaine zone, la densité de probabilité de X est inversement proportionnelle au volume de la particule; c'est-à-dire, supposons que

$$f_X(x) = \frac{c}{x^3}, \quad x > 1,$$

où c est une constante.

- (a) Déterminer la valeur c tel que f_X soit une fonction de densité de probabilité.
(b) Le terme PM_{10} fait référence aux particules de $10 \mu m$ ou moins en diamètre. Quelle proportion des particules contaminantes sont PM_{10} ?
(c) Le terme $PM_{2,5}$ fait référence aux particules de $2,5 \mu m$ ou moins en diamètre. Quelle proportion des particules contaminantes sont $PM_{2,5}$?
(d) Quelle proportion des particules PM_{10} sont $PM_{2,5}$?

Question 1

MAT 2777

Exam #2

2016-02-07

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 0,17 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0,53 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0,84 & ; 2 \leq x < 3 \\ 0,97 & ; 3 \leq x < 4 \\ 1 & ; 4 \leq x \end{cases} \Rightarrow P_X(x) = \begin{cases} 0,17 & ; x=0 \\ 0,36 & ; x=1 \\ 0,31 & ; x=2 \\ 0,13 & ; x=3 \\ 0,03 & ; x=4 \end{cases}$$

30/5

a) $P(X < 2) = P(X=1) + P(X=0) = 0,17 + 0,36 = 0,53$

b) $P(X > 3) = P(X=4) = 0,03$

c) $P(X=1) = 0,36$

d) $E[X] = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x P_X(x) = 0(0,17) + 1(0,36) + 2(0,31) + 3(0,13) + 4(0,03) = 1,49 = E[X]$

Question 2

$$P_X(x) = \begin{cases} 0,4 & ; x=4 \\ 0,3 & ; x=6 \\ 0,2 & ; x=8 \\ 0,1 & ; x=10 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 4 \\ 0,4 & ; 4 \leq x < 6 \\ 0,7 & ; 6 \leq x < 8 \\ 0,9 & ; 8 \leq x < 10 \\ 1 & ; 10 \leq x \end{cases}$$

a) $P(X=6) = 0,3$; $P(X \leq 7) = 0,7$; $P(X > 5) = P(X=6) + P(X=8) + P(X=10) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6$

b) $E[7+10X] = 7 + 10E[X] = 7 + 10 \left[\sum_{x \in \mathcal{R}_X} x P_X(x) \right] = 7 + 10 [4(0,4) + 6(0,3) + 8(0,2) + 10(0,1)] = 7 + 10(6) = 67$

c) $E\left[\frac{1}{x}\right] = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} \left(\frac{1}{x}\right) P_X(x) = \left(\frac{1}{4}\right)(0,4) + \left(\frac{1}{6}\right)(0,3) + \left(\frac{1}{8}\right)(0,2) + \left(\frac{1}{10}\right)(0,1) = 0,185$

Question 3

$$a) F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 3 \\ 1 - \frac{81}{x^4} & , x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 3 \\ \frac{324}{x^5} & , x \geq 3 \end{cases}$$

$$bii) P(5 < X < 10) = \int_5^{10} f_X(x) dx = \int_5^{10} 0 dx + \int_5^{10} \left(\frac{324}{x^5}\right) dx = 324 \left[-\frac{1}{4x^4} \right]_5^{10} = \left[-\frac{81}{x^4} \right]_5^{10} \\ = \left(-\frac{81}{10^4} \right) - \left(-\frac{81}{5^4} \right) = 0,1215$$

$$bi) P(5 < X < 10) = F_X(10) - F_X(5) = \left[1 - \frac{81}{10^4} \right] - \left[1 - \frac{81}{5^4} \right] = 0,9919 - 0,8704 = 0,1215$$

$$c) E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_3^{\infty} x \left(\frac{324}{x^5}\right) dx = \int_3^{\infty} \frac{324}{x^4} dx = \left[-\frac{108}{x^3} \right]_3^{\infty} = (0) - \left(-\frac{108}{27} \right) = 4 = E[X] = \mu_X$$

$$d) \sigma_X = \sqrt{V[X]} = \sqrt{E[X^2] - \mu_X^2} = \sqrt{\left[\int_3^{\infty} x^2 \left(\frac{324}{x^5}\right) dx \right] - \mu_X^2} = \sqrt{\left[\int_3^{\infty} \frac{324}{x^3} dx \right] - \mu_X^2} \\ = \sqrt{\left[-\frac{162}{x^2} \right]_3^{\infty} - \mu_X^2} = \sqrt{\left[(0) - (16) \right] - (4)^2} = \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2} = \sigma_X$$

Question 4

$$f_X(x) = \begin{cases} p = \frac{1}{11} & ; x=0 \\ 2p = \frac{2}{11} & ; x=1 \\ 3p = \frac{3}{11} & ; x=2 \\ 5p = \frac{5}{11} & ; x=3 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ p & ; 0 \leq x < 1 \\ 3p & ; 1 \leq x < 2 \\ 6p & ; 2 \leq x < 3 \\ 11p & ; 3 \leq x \end{cases}$$

$$a) \text{prob. totale} = 11p = 100\% = 1 = P(3 \leq X) \Rightarrow \underline{p = \frac{1}{11}}$$

$$b) \mu_X = E[X] = \sum_{k \in R_X} x f_X(x) = 0 \left(\frac{1}{11}\right) + 1 \left(\frac{2}{11}\right) + 2 \left(\frac{3}{11}\right) + 3 \left(\frac{5}{11}\right) = \frac{23}{11} = \mu_X \approx 2,09$$

$$c) \sigma_X = \sqrt{V[X]} = \sqrt{E[X^2] - \mu_X^2} = \sqrt{\left[0^2 \left(\frac{1}{11}\right) + 1^2 \left(\frac{2}{11}\right) + 2^2 \left(\frac{3}{11}\right) + 3^2 \left(\frac{5}{11}\right) \right] - \left(\frac{23}{11}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{59}{11}\right) - \left(\frac{23}{11}\right)^2} \\ \underline{\sigma_X = \frac{120}{121}} \approx 0,992$$

$$d) E[100 - 10X] = 100 - 10E[X] = 100 - 10 \left(\frac{23}{11}\right) = \frac{870}{11} = E[100 - 10X] \approx 79,091$$

$$e) (I) E[100 - 10X] = \frac{870}{11} = \mu_{(100-10X)}$$

$$(II) E[(100 - 10X)^2] = E[100^2 - 2000X + 10000] = 10000 - 2000E[X] + 100E[X^2] = 10000 - 2000 \left(\frac{23}{11}\right) + 100 \left(\frac{59}{11}\right) \approx 6354,55$$

$$(III) \sigma_{(100-10X)} = \sqrt{V[100-10X]} = \sqrt{E[(100-10X)^2] - \mu_{(100-10X)}^2} = \sqrt{6354,55 - \left(\frac{870}{11}\right)^2} = \sqrt{99,173553}$$

$$\underline{\approx 9,96}$$

Question 5

$$f_x(x) = \frac{c}{x^3}, x > 1$$

$$a) 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^3} dx = \left[\frac{-c}{2x^2} \right]_1^{\infty} = [-0] - \left[\frac{-c}{2(1)^2} \right] = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow c = 2 \cdot 1 = 2 = c$$

$$\Rightarrow f_x(x) = 2/x^3, x > 1$$

$$b) PM_{10} = \int_1^{10} \frac{2}{x^3} dx = \left[\frac{-2}{2x^2} \right]_1^{10} = \left(\frac{-1}{10^2} \right) - \left(\frac{-1}{1^2} \right) = -0,01 + 1 = 0,99 = PM_{10}, \quad 1 < x \leq 10$$

$$c) PM_{2,5} = \int_1^{2,5} \frac{2}{x^3} dx = \left[\frac{-1}{x^2} \right]_1^{2,5} = \left(\frac{-1}{(2,5)^2} \right) - \left(\frac{-1}{1^2} \right) = -0,16 + 1 = 0,84 = PM_{2,5}$$

$$d) PM_{10} - PM_{2,5} = 0,99 - 0,84 = 0,15$$

Proportion de PM_{10} qui sont $PM_{2,5} = 1 - \left[\frac{PM_{10} - PM_{2,5}}{PM_{2,5}} \right] = 1 - \left[\frac{0,99 - 0,84}{0,84} \right] = 0,821428571$
 $\approx 0,82$

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 3

Echeance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le jeudi 16 février 2017
Il y a 3 questions

Veillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. Considérons la fonction masse de probabilité conjointe :

x	y	$p_{XY}(x, y)$
-2	-5	7/50
-2	0	5/50
-2	5	3/50
0	-5	9/50
0	0	6/50
0	5	12/50
2	-5	1/50
2	0	4/50
2	5	3/50

X	$P_X(X)$
-2	15/50
0	27/50
2	8/50

Y	$P_Y(Y)$
-5	17/50
0	15/50
5	18/50

- (a) Calculer la covariance entre X et Y .
 (b) Est-ce que X et Y sont indépendantes? (Veillez fournir une justification pour votre réponse)
 (c) Déterminer la variance de $X + 2Y$ et la variance de $7X - Y$

2. Considérer la fonction de masse de probabilité conjointe suivante.

x	y	$p_{XY}(x, y)$
-1	-1	1/20
-1	0	4/20
0	0	2/20
0	1	7/20
0	3	2/20
1	1	3/20
2	-2	1/20

X	$P_X(X)$
-1	5/20
0	11/20
1	3/20
2	1/20

Y	$P_Y(Y)$
-2	1/20
-1	11/20
0	6/20
1	10/20
3	2/20

- (a) Déterminer $P(X = -1)$ et $P(X = -1 | Y = -1)$.
 (b) Déterminer la fonction de masse de probabilité marginale pour X et pour Y .
 (c) Déterminer la covariance de X et de Y .
 (d) Est-ce que X et Y sont indépendantes? (Veillez fournir une justification pour votre réponse)

3. Considérer la fonction de masse de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y) = c(1/2)^x (1/2)^y$, pour (x, y) tel que $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ et $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$. (c est une constante).

- (a) Déterminer la valeur de c .
 (Indice : utiliser la formule pour une série géométrique : $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ pour $0 < r < 1$)
 (b) Déterminer la fonction masse de probabilité marginale pour X et pour Y .
 (c) Est-ce que X et Y sont indépendantes? (Veillez fournir une justification pour votre réponse)
 (d) Déterminer la covariance entre X et Y .

* Pour mes tableaux de valeurs, SVT faire référence à la feuille de question de ce packet.

19
20

MAT 2777

2016-07-13

Revoir #3

Question 1

a) $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_{(x,y) \in \Omega} x y P_{X,Y}(x, y) - \mu_X \mu_Y = E[XY] - \mu_X \mu_Y$

• $E[XY] = (-2)(-5)(7/50) + (-2)(0)(15/50) + (-2)(5)(3/50) + (0)(-5)(9/50) + (0)(0)(6/50) + (0)(5)(12/50) + (2)(-5)(1/50) + (2)(0)(4/50) + (2)(5)(3/50)$
 $= (-2)(-5)(7/50) + (-2)(5)(3/50) + (2)(-5)(1/50) + (2)(5)(3/50)$
 $= 10(7/50) - 10(3/50) - 10(1/50) + 10(3/50) = (70/50) - (10/50) = \frac{60}{50} = \frac{12}{10} = 1,2$ ✓

• $\mu_X = E[X] = (-2) \left[\frac{7}{50} + \frac{5}{50} + \frac{3}{50} \right] + (0) \left[\frac{9}{50} + \frac{6}{50} + \frac{12}{50} \right] + (2) \left[\frac{1}{50} + \frac{4}{50} + \frac{3}{50} \right] = -0,28$ ✓

• $\mu_Y = E[Y] = (-5) \left[\frac{7}{50} + \frac{9}{50} + \frac{1}{50} \right] + (0) \left[\frac{15}{50} + \frac{12}{50} + \frac{3}{50} \right] + (5) \left[\frac{3}{50} + \frac{6}{50} + \frac{4}{50} \right] = 0,1$ ✓

• $Cov(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y = 1,2 - (-0,28)(0,1) = 1,228 = Cov(X, Y)$ ✓

b) X et Y sont indépendants si $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$, où $\Omega_X \times \Omega_Y = \{(x, y) \in \Omega \mid x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$

$\left[\begin{array}{l} P_{X,Y}(-2, 5) = 7/50 \\ P_X(-2) = 15/50 \\ P_Y(5) = 18/50 \end{array} \right] \rightarrow P_X(-2)P_Y(5) = \left(\frac{15}{50}\right)\left(\frac{18}{50}\right) = \frac{270}{50} \neq \frac{7}{50}$
 $\rightarrow P_{X,Y}(-2, 5) \neq P_X(-2)P_Y(5)$
 $\rightarrow X$ et Y sont donc ~~dépendants~~

c) (I) • $V[X+2Y] = V[X] + V[2Y] + 2Cov(X, 2Y) = V[X] + 2^2V[Y] + 2(2)Cov(X, Y)$
 $= V[X] + 4V[Y] + 4Cov(X, Y)$

• $V[X] = E[X^2] - \mu_X^2 = \left(\sum_{(x,y) \in \Omega} x^2 P_{X,Y}(x, y) \right) - \mu_X^2$
 $E[X^2] = (-2)^2(15/50) + (0)^2(27/50) + (2)^2(8/50) = 1,84$

$V[X] = 1,84 - (-0,28)^2 = 1,7616 = V[X]$ ✓

• $V[Y] = E[Y^2] - \mu_Y^2$
 $E[Y^2] = (-5)^2(17/50) + (0)^2(15/50) + (5)^2(18/50) = 17,5$

$V[Y] = 17,5 - (0,1)^2 = 17,49 = V[Y]$ ✓

$\Rightarrow V[X+2Y] = V[X] + 4V[Y] + 4Cov(X, Y) = 1,7616 + 4(17,49) + 4(1,228) = 76,6336 = V[X+2Y]$ ✓

(II) • $V[7X-Y] = V[7X] + V[-Y] + 2Cov(7X, -Y) = (7)^2V[X] + (-1)^2V[Y] + 2(7)(-1)Cov(X, Y)$
 $= 49V[X] + V[Y] - 14Cov(X, Y)$
 $= 49(1,7616) + 17,49 - 14(1,228) = 86,6164 = V[7X-Y]$ ✓

* pour mes tableaux de valeurs, faites référence à la feuille de questions attachée à ce fascicule

Question 2

a) (I) $P(X=-1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$

(II) $P(X=1 | Y=-1) = \frac{1}{20} = 0,05 \Rightarrow P(X=-1 | Y=-1) = \frac{P(X=-1 \cap Y=-1)}{P(Y=-1)} = \frac{(1/20)}{(1/20)} = 1$

b) * référez-vous à la question #2 de la feuille de questions de ce fascicule.

c) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y$

$E[XY] = (-1)(-1)\left(\frac{1}{20}\right) + (-1)(0)\left(\frac{4}{20}\right) + (0)(0)\left(\frac{6}{20}\right) + (0)(1)\left(\frac{7}{20}\right) + (0)(3)\left(\frac{2}{20}\right) + (1)(1)\left(\frac{3}{20}\right) + (2)(-2)\left(\frac{1}{20}\right)$
 $= \left(\frac{1}{20}\right) + \left(\frac{3}{20}\right) - 4\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{4}{20} - \frac{4}{20} = 0 = E[XY]$

$\mu_X = E[X] = (-1)\left(\frac{5}{20}\right) + (0)\left(\frac{4}{20}\right) + (1)\left(\frac{3}{20}\right) + (2)\left(\frac{1}{20}\right) = 0 = \mu_X$

$\mu_Y = E[Y] = (-2)\left(\frac{1}{20}\right) + (-1)\left(\frac{1}{20}\right) + (0)\left(\frac{6}{20}\right) + (1)\left(\frac{10}{20}\right) + (3)\left(\frac{2}{20}\right) = 1 = \mu_Y$

$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y = (0) - (0)(1) = 0 = \text{Cov}(X, Y)$

d) X et Y sont indépendantes si $P_{XY}(x, y) = P_X(x)P_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, ou $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(x, y) \mid P_X(x) \neq 0 \text{ et } P_Y(y) \neq 0\}$

$P_{XY}(-1, -1) = 1/20 = 0,05$

$P_X(-1) = 5/20 = 0,25$

$P_Y(-1) = 1/20 = 0,05$

$\Rightarrow P_{XY}(-1, -1) \neq P_X(-1)P_Y(-1)$
 $\Rightarrow X$ et Y sont donc ~~indépendantes~~

Question 3

$P_{X,Y}(x,y) = c \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^y$, pour (x,y) t.p. $x \in \{0,1,2,\dots\}$ et $y \in \{0,1,2,\dots\}$

a)
$$= F_{X,Y}(2,2) = \sum_{(x,y) \leq (2,2)} P_{X,Y}(x,y) = c \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^y = c \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}$$

- $\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2$
- $P_{X,Y}(x,y) = 1 = c \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^y \Rightarrow 1 = c(2)(2) \Rightarrow \underline{c = \frac{1}{4}}$

b) ① $P_X(x) = c \left(\frac{1}{2}\right)^x \left[\sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^y \right] = c \left(\frac{1}{2}\right)^x (2) = \left(\frac{1}{2}\right)(2) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \underline{P_X(x)}$
② $P_Y(y) = c \left[\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] \left(\frac{1}{2}\right)^y = c \left(\frac{1}{2}\right)^y (2) = \left(\frac{1}{2}\right)(2) \left(\frac{1}{2}\right)^y = \underline{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^y = P_Y(y)}$

c) X et Y sont indépendantes si $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{(x,y) \mid P_X(x) \neq 0 \text{ et } P_Y(y) \neq 0\}$

$\left[\begin{array}{l} \bullet P_{X,Y}(0,0) = (1/4) \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right) (1/4) = \frac{1}{16} \\ \bullet P_X(0) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right) (1) = \frac{1}{2} \\ \bullet P_Y(0) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right) (1) = \frac{1}{2} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} P_X(0)P_Y(0) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right) \\ \text{X et Y sont donc} \\ \text{indépendantes} \end{array} \right\}$
--

d) Tandis qu'à la dernière étape (3c) nous avons démontré que X et Y sont indépendantes, nous voyons que $\underline{\text{Cov}(X,Y) = 0}$.

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 4

Echance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le jeudi 9 mars 2017
Il y a 4 questions

Veillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

- Nous cueillons 25 échantillons d'eau. Supposons qu'un échantillon d'eau ait une probabilité de 4% d'être pollué. Soit X le nombre d'échantillons qui sont pollués parmi les 25 échantillons.
 - Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - Calculer $P(X = 3)$ sans et avec l'approximation Poisson.
 - Calculer $P(X > 2)$ et $P(4 \leq X < 6)$
- Référez aux échantillons d'eau de la Question 1. Supposons que nous cueillons les échantillons d'eau un à la fois.
 - Quelle est la probabilité que le 5^{ième} échantillon est le premier échantillon pollué?
 - Quelle est la probabilité que le 6^{ième} échantillon sera le deuxième échantillon pollué?
 - Donner la moyenne et l'écart type du nombre d'échantillons requis afin d'observer deux échantillon pollué.
- Des composants électroniques sont expédiés dans des boîtes de 18 composants. Environ 10 % des composants ont des défauts. On vérifie les boîtes une à la fois.
 - Quelle est la probabilité qu'une boîte contient seulement des composants non-défectueux?
 - Considérons 12 boîtes. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 des 12 boîtes contiennent seulement des composants non-défectueux?
 - Quelle est la loi de probabilité du nombre de boîtes à vérifier afin d'avoir une boîte qui contient seulement des composants non-défectueux?
- Supposons que les tempêtes géomagnétiques se produisent selon un processus de Poisson avec un taux de 2,5 tempêtes par an. (Ces tempêtes peuvent perturber les réseaux électriques et affecter les satellites, et sont un motif d'inquiétudes pour les compagnies d'électricité et pour autres entreprises technologiques.)
 - Calculer la probabilité qu'au moins 4 tempêtes géomagnétiques se produisent l'année prochaine.
 - Trouvez le nombre espéré de tempêtes géomagnétiques dans les 4 prochains mois.
 - Trouvez la probabilité qu'il n'y ait pas de tempête géomagnétique entre le 1er juillet et le 1er décembre (c'est-à-dire en 153 jours). Vous pouvez supposer qu'une année ait 365 jours.

Q1

a) Soit X le nombre d'échantillons d'eau polluée parmi $n=25$. Alors X suit une loi binomiale avec $n=25$ et $p=0,04$.
On veut $P(X=k) = \binom{25}{k} (0,04)^k (1-0,04)^{25-k}$

b) sans l'approximation Poisson $P(X=3) = \binom{25}{3} (0,04)^3 (0,96)^{22} = 0,059961838 \approx 0,06$
avec "
" $\mu = np = 25(0,04) = 1$
 $\hookrightarrow P(X=3) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-1} \frac{1^3}{3!} = 0,06131324 \approx 0,06$

c) [1] $P(X > 2) = 1 - [P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)]$; $\mu = np = 1$
 $= 1 - e^{-1} [(1/2!) + (1/1!) + (1/0!)] = 1 - e^{-1} (\frac{1}{2} + 1 + 1) = 0,080332397 \approx 0,08$

[2] $P(4 \leq X \leq 6) = P(X=4) + P(X=5) = e^{-1} [\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}] = 0,018343977 \approx 0,02$

Q2

a) Soit T , le nombre d'échantillons d'eau cueillis afin d'obtenir le premier échantillon pollué. Alors T suit une loi géométrique avec $p=0,04$
 $P(T=k) = (1-p)^{k-1} p = (1-0,04)^{5-1} 0,04 = 0,032973862 \approx 0,03$

(-1) b) Soit T_n le nombre d'échantillons cueillis pour obtenir le 2^e échantillon pollué. Alors T_n suit une loi binomiale négative avec $r=2$ et $p=0,04$.
 $P(T_n=k) = P(T_n=2) = \binom{k-1}{2-1} (1-p)^{k-2} p^2 = \binom{4}{1} (1-0,04)^{4-2} (0,04)^2 = 0,00566231 \approx 0,01$

c) 1) $\mu = E(T_n) = \frac{r}{p} = \frac{2}{0,04} = 50$

2) $\sigma = \sqrt{V(T_n)} = \sqrt{r(1-p)/p^2} = \sqrt{2(1-0,04)/0,04^2} = 34,64101615 \approx 34,64$

Q3

On a des boîtes de 18 composants,
Chaque composant a une prob. de $p=0,1$ d'avoir un défaut

a) Soit X le nombre de composants défectueux parmi $n=18$.

Alors X suit une loi binomiale avec $n=18$ et $p=0,1$.

$$P(X=0) = \binom{18}{0} (0,1)^0 (0,9)^{18} = (1)(1)(0,9)^{18} = 0,150094635 \approx 0,15$$

b) Soit X le nb. de boîtes non-défectueuses parmi $n=12$

Alors X suit une loi binomiale avec $n=12$ et $p \approx 0,15$. $\mu = np = 1,8012562 \approx 1,8$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)] = 1 - [\binom{12}{2} (0,15)^2 (0,85)^{10}] + [\binom{12}{1} (0,15) (0,85)^{11}] + [\binom{12}{0} (0,15)^0 (0,85)^{12}] \\ = 1 - 0,735422538 = 0,264577462 \approx 0,27$$

c) Soit X le nombre de boîtes à vérifier afin d'avoir une boîte qui contient
uniquement des composants non-défectueux.

Alors X suit une loi géométrique avec $p \approx 0,15$.

$$P(X=2) = (1-p)^{2-1} p \approx (0,85)^{2-1} (0,15)$$

Q4

a) On sait que $N(t) \sim \text{Poisson}$ avec $\mu = \lambda t = 2,5t$

On veut $P(4 \leq N(1)) = 1 - [P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)]$ où $\mu = (2,5)(1) = 2,5$

$$= 1 - [e^{-\mu} \left(\frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu}{1!} + \frac{\mu^0}{0!} \right)] = 0,242423867 \approx 0,24$$

b) $E[X] = \mu = 2,5 \left[4 \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 2,5 \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6} \approx 0,833$

c) On veut $P\left(N\left[\frac{1}{365}, 153\right] = 0\right) = P\left(N\left(\frac{153}{365}\right) = 0\right)$ où $\mu = (2,5) \left(\frac{153}{365}\right) = \frac{153}{145} \approx 1,048$
 $= e^{-\mu} [\mu^0 / 0!] = e^{-\mu} = 0,35657539 \approx 0,351$

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 5

*Echeance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le jeudi 23 mars 2017
Il y a 5 questions*

Veillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. Supposons que la durée de vie (en mois) d'un transistor suit une loi exponentielle avec une moyenne 5 mois.

- Processus Poisson*
- (a) Trouvez la probabilité qu'un tel transistor ait une durée de vie supérieure à 7 mois.
 (b) Trouvez la probabilité que la durée de vie d'un transistor soit comprise entre 3 et 8 mois.
 (c) Supposons que le transistor est maintenant âgé de 4 mois et qu'il fonctionne toujours. Trouvez la probabilité qu'il fonctionne au moins 3 mois *supplémentaires*.

2. Supposons que les appels à un centre d'appel se réalisent selon un processus de Poisson de taux $\lambda = 0,2$ appels par minute. Soit X le temps d'attente (en minutes) pour le premier appel.

- (a) Donner la moyenne et la variance de X .
 (b) Quelle est la probabilité que le temps d'attente pour le premier appel sera moins qu'une minute?
 (c) Quelle est la probabilité que le temps d'attente pour le troisième appel sera au plus 2 minutes?

3. Soit X une variable aléatoire normale de moyenne 25 et d'écart type 4.

- (a) Calculer $P(X > 18)$.
 (b) Calculer $P(27 < X < 35)$;
 (c) Calculer $P(17 \leq X \leq 23)$;
 (d) Trouver une valeur c tel que $P(c - X \leq 4) = 0,872$.

4. Le volume de jus de pomme dans les boîtes remplies par une certaine machine est normalement distribué avec une moyenne de 12,05 onces et un écart type de 0,03 onces.

- (a) Quelle proportion des boîtes contiennent moins de 12 onces de jus de pomme?
 (b) Le volume moyen de jus de pomme peut être ajusté en calibrant la machine. Si l'écart type est fixé à 0,03 once, à quelle valeur la moyenne doit-elle être fixée pour que 99 % des boîtes contiennent 12 onces ou plus de jus de pomme?
 (c) Si nous modifions plutôt l'écart type, mais fixons la moyenne à 12,05 onces, à quelle valeur devrions-nous fixer l'écart type afin que 99 % des boîtes contiennent 12 onces ou plus de jus de pomme?

5. Considérons l'échantillon aléatoire suivant d'une variable quantitative.

5,4 4,6 7,2 4,4 3,5 8,9 10,3 2,6 5,8 4,2 4,6 3,5 8,9 10,3 11,5 3,5 5,8

- (a) Calculer la moyenne de l'échantillon et la médiane de l'échantillon.
 (b) Déterminer le premier quartile q_1 et le troisième quartile q_3 .
 (d) Calculer l'étendue et la distance interquartile (DIQ).

Question 1

- a) • moyenne = $\mu_x = 5 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$
 • processus de Poisson de taux $\lambda = \frac{1}{5}$ arrivés de nuit par mail.
 • ~~$P(N(\lambda) > 7) = 1 - P(N(\lambda) \leq 6) = 1 - e^{-\lambda} [\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \frac{\lambda^6}{6!}]$~~

$P(X > 7) = e^{-\lambda(7)} = 0,2466$

~~$$= 1 - e^{-1/5} (1 + 1/5 + 0,98 + \frac{343}{750} + 0,116 + 0,05 + 0,01)$$~~
~~$$= 0,000622 \times 2,15 \approx 0,001$$~~

- b) • T = longueur requise en mail pour observer une durée de vie

~~$$P(3 < T < 8) = e^{-1/5} [\frac{1/5^3}{3!} + \frac{1/5^4}{4!} + \frac{1/5^5}{5!} + \frac{1/5^6}{6!} + \frac{1/5^7}{7!} + \frac{1/5^8}{8!}]$$~~
~~$$= e^{-1/5} [0,000520833 + 0,000062604] = 0,166495973 \approx 0,17$$~~

$P(3 < X < 8) = F_X(8) - F_X(3) = (1 - e^{-\lambda(8)}) - (1 - e^{-\lambda(3)}) = 0,3469$

c) $P[X > 7 | X > 4] = P[X > 3]$ (Absence de mémoire)
 $= e^{-\lambda(3)} = e^{-(1/5)(3)} = 0,548811636 \approx 0,55$

Question 2

- a) • $\mu_x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2} = 5$ • $V[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0,2)^2} = 25$

b) ~~• T = longueur requise en mail pour observer une durée de vie~~
~~$$P[X < 1] = 1 - P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda(1)} = 1 - e^{-0,2} = 1 - 0,818730753 \approx 0,1813$$~~
~~$$= 1 - e^{-\lambda(1)} = 0,1813$$~~ ~~$$= 1 - e^{-2(1)}$$~~

$P(T_3 \leq 2) = 1 - P(T_3 > 2) = 1 - P[N(2) \leq 3] = 1 - P[N(2) \leq 2]$
 $= 1 - e^{-\lambda t} [\frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!}] = 1 - e^{-0,4} (1,49)$
~~$$= 0,007926377$$~~
~~$$= 0,01$$~~

pour compléter c)
cette question,
fait référence
à la loi Erlang

Question 3

$$\checkmark a) P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - \Phi\left(\frac{18 - 25}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{18 - 25}{4}\right) = 1 - \Phi(-1.75) = 1 - 0.0401 = 0.9599$$

$$\checkmark b) P(27 < X < 35) = \Phi\left(\frac{35 - 25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{27 - 25}{4}\right) = \Phi(2.5) - \Phi(0.5) = 0.9938 - 0.6915 = 0.3023$$

$$\checkmark c) P(17.5 < X < 23) = \Phi\left(\frac{23 - 25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{17.5 - 25}{4}\right) = \Phi(-0.5) - \Phi(-2) = 0.3085 - 0.0228 = 0.2857$$

$$\checkmark d) P(c - X < 4) = 0.872 \Leftrightarrow P(c - X < 4) = P(X > c - 4) = 1 - P(X \leq c - 4) = 1 - \Phi\left(\frac{c - 4 - 25}{4}\right) = 0.872 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c - 4 - 25}{4}\right) = 0.128$$

On tableau 0, 0.128 \approx $\Phi(-1.14)$

Alors, $\frac{c - 29}{4} = -1.14 \Leftrightarrow c = -4(1.14) + 29 \Leftrightarrow c = 24.44$

Question 4

$\mu = 12.05$ et $\sigma = 0.03$

$$a) P(X < 12) = \Phi\left(\frac{12 - 12.05}{0.03}\right) = \Phi(-1.67) = 0.0475$$

$$b) P(X > 12) = 0.99 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 12) = 0.99$$

$$\bullet 1 - \Phi\left(\frac{12 - \mu}{0.03}\right) = 0.99 \Leftrightarrow 0.01 = \Phi\left(\frac{12 - \mu}{0.03}\right)$$

$$\bullet 0.01 = \Phi(-2.33)$$

$$\bullet -2.33 = \frac{12 - \mu}{0.03} \Leftrightarrow \mu = 12.0699$$

$$c) P(X > 12) = 0.99 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 12) = 0.99$$

$$\bullet 1 - \Phi\left(\frac{12 - 12.05}{\sigma}\right) = 0.99 \Leftrightarrow 0.01 = \Phi\left(\frac{-0.05}{\sigma}\right)$$

$$\bullet 0.01 = \Phi(-2.33)$$

$$\bullet -2.33 = \frac{-0.05}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = 0.02146$$

~~10/10~~
~~10/10~~

~~10/10~~

Question 5

$Y_1 = 2,6$	$Y_2 = 3,5$	$Y_3 = 3,5$	$Y_4 = 3,5$	$Y_5 = 4,2$	$Y_6 = 4,4$
$Y_7 = 4,6$	$Y_8 = 4,6$	$Y_9 = 5,4$	$Y_{10} = 5,8$	$Y_{11} = 5,8$	$Y_{12} = 7,2$
$Y_{13} = 8,9$	$Y_{14} = 8,9$	$Y_{15} = 10,3$	$Y_{16} = 10,3$	$Y_{17} = 11,5$	$n = 17$

a) • moyenne de l'échantillon $= \bar{Y} = (\sum_{i=1}^n Y_i) / n = \frac{105}{17} \approx 6,18$

• médiane de l'échantillon $= Y_9 = 5,4$

↳ rang de la médiane $= \frac{(n+1) \cdot 50}{100} = \frac{(17+1) \cdot 50}{100} = 9$

b) (I) • rang de $q_1 = \frac{(n+1) \cdot 25}{100} = 4,5$

• $q_1 = Y_4 + 0,5(Y_5 - Y_4) = 3,5 + 0,5(4,2 - 3,5) = 3,85$

(II) • rang de $q_3 = \frac{(n+1) \cdot 75}{100} = 13,5$

• $q_3 = Y_{13} + 0,5(Y_{14} - Y_{13}) = 8,9 + 0,5(8,9 - 8,9) = 8,9$

c) • l'étendue de l'échantillon $= r = \max(Y_i) - \min(Y_i) = Y_n - Y_1 = 11,5 - 2,6 = 8,9$

• la distance interquartile (IQR) $= q_3 - q_1 = 8,9 - 3,85 = 5,05$

MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 6

*Echeance : S'il vous plaît soumettre dans la boîte pour devoirs à 585 King Edward avant 19h le jeudi 6 avril 2017
Il y a 4 questions*

Veillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. Soient X , Y , et Z des variables aléatoires normales et indépendantes, où $X \sim N(\mu_X = 1, \sigma_X^2 = 3)$, $Y \sim N(\mu_Y = 0, \sigma_Y^2 = 2)$, et $Z \sim N(\mu_Z = 5, \sigma_Z^2 = 1)$. Soit $W = 3X - 6Y + 2Z$.
 - (a) Déterminer $E[W]$ et $V[W]$.
 - (b) Quelle est la loi de probabilité pour W ?
 - (c) Calculer $P(7 < W < 9)$?
2. Soient X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon aléatoire de taille $n = 60$ d'une population avec la loi de probabilité suivante : Pour chaque i : on a

$$P(X_i = x) = \frac{1}{6}, \quad \text{pour } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Soit $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- (a) Calculer la moyenne de la population μ et la variance de la population σ^2 ?
 - (b) Calculer $E[Y]$ et $V[Y]$?
 - (c) Quelle est la loi de probabilité approximative de Y ?
 - (d) Approximer la probabilité suivante $P(Y > 160)$.
3. Soit x_1, x_2, \dots, x_n un échantillon aléatoire de taille $n = 100$ d'une population de moyenne μ et de variance connue $\sigma^2 = 0,5$. On a calculé la moyenne de l'échantillon $\bar{x} = 8,3$.
 - (a) Donner un intervalle de confiance à 95% pour μ .
 - (b) Donner un intervalle de confiance unilatéral limité à la droite à 99,9% pour μ .
 - (c) Donner un intervalle de confiance unilatéral limité à la gauche à 90% pour μ .
 - (d) Nous voulons déterminer une taille d'échantillon n pour une autre étude. Déterminer la taille d'échantillon requise n , afin que nous sommes 90% confiant que l'erreur de l'estimation de la moyenne soit inférieure à 0,007.
 4. Soit x_1, x_2, \dots, x_n un échantillon aléatoire de taille $n = 10$ d'une population de moyenne μ et de variance σ^2 . On a calculé la moyenne de l'échantillon $\bar{x} = -6$ et la variance de l'échantillon $s^2 = 0,3$. Donner un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population μ .

Question 1

a) $E[W] = 3E[X] - 6E[Y] + 2E[Z] = 3(1) - 6(0) + 2(5) = 13$
 $V[W] = 3^2V[X] - 6^2V[Y] + 2^2V[Z] = 3^2(3) + (-6)^2(2) + 2^2(1) = 103$

b) $W \sim N(\mu_W = 13, \sigma_W^2 = 103)$

c) $P(7 < W < 9) = \Phi\left(\frac{9-13}{\sqrt{103}}\right) - \Phi\left(\frac{7-13}{\sqrt{103}}\right) = \Phi(-0,39) - \Phi(-0,59) = 0,3483 - 0,2776 = 0,071$

Question 2

a) $\mu = E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x P_X(x) = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)(0+1+2+3+4+5) = \left(\frac{1}{6}\right)(15)$
 $= 5/2 = 2,5$

$\sigma^2 = V[X] = E[X^2] - \mu^2 = \left[\left(\frac{1}{6}\right)(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\right] - (2,5)^2 = \frac{55}{6} - 2,5^2 = \frac{35}{12} \approx 2,92$

b) $E[Y] = \sum_{i=1}^{60} E[X_i] = \sum_{i=1}^{60} 2,5 = 60(2,5) = 150$

$V[Y] = \sum_{i=1}^{60} V[X_i] = \sum_{i=1}^{60} (35/12) = 60(35/12) = 175$

c) $Y \sim N(\mu_Y = 150, \sigma_Y^2 = 175)$ approximated normal

d) $P(Y > 160) = 1 - P(Y \leq 160) = 1 - \Phi\left(\frac{160-150}{\sqrt{175}}\right) = 1 - \Phi(0,76) = 0,2236$

Question 3

a) $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8,3 \pm Z_{0,025} \left(\frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{100}} \right) = 8,3 \pm (1,96) \left(\frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{100}} \right) = [8,16; 8,44]$

b) $\alpha = 0,01 \Rightarrow \bar{X} + Z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8,3 + (3,090) \left(\frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{100}} \right) = 8,518495995 \approx 8,519$
donc on est 99,9% confiant que $\mu \leq 8,519$

c) $\alpha = 0,1 \Rightarrow \bar{X} + Z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8,3 + (1,282) \left(\frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{100}} \right) = 8,209348911 \approx 8,209$
donc on est 90% confiant que $\mu \geq 8,209$

d) $n \geq \frac{(Z_{\alpha/2} \cdot \sigma)^2}{E} = \frac{(Z_{0,025} \cdot \sqrt{0,5})^2}{0,007} = \frac{(1,96 \cdot \sqrt{0,5})^2}{0,007} = 27612,5$
 $n = 27613$ observations

Question 4

$\alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025$; $n = 10$; $\bar{X} = -6$; $S = \sqrt{0,3}$
IC à 95% pour $\mu = \bar{X} \pm t_{0,025;9} \cdot \frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{10}} = -6 \pm (2,262) \left(\frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{10}} \right) = [-6,39; -5,61]$