[**2**] **1.** Trouver la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{4x+1}$ selon la définition. Vous devez utiliser la définition, et non les règles de dérivation.

solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4(x+h)+1} - \frac{1}{4x+1}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(4x+1) - (4(x+h)+1)}{h\,(4x+1)\,(4(x+h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h\,(4x+1)\,(4(x+h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4}{(4x+1)\,(4(x+h)+1)} \\
&= \frac{-4}{(4x+1)\,(4(x+0)+1)} \\
&= \frac{-4}{(4x+1)^2}
\end{aligned}$$

[**1**] **2.** Donner la (les) valeur(s) de a tel que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + a & \text{if } x < 2 \\ 2^x - ax & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

est continue partout.

solution: La fonction est continue lorsque $x \neq 2$ car les exponentiels, puissances, sommes, produits sont tous continus. Pour $x = 2$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} g(x) &= \lim_{x\to 2^-} (x-1)^2 + a = (2-1)^2 + a = 1 + a \\
\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} 2^x - ax = 2^2 - a2 = 4 - 2a
\end{aligned}$$

On pose égal.

$$\begin{aligned}
1 + a &= 4 - 2a \\
a &= 1
\end{aligned}$$

[**4**] **3.** Trouver chaque limite. Vous pouvez utiliser n'importe quelle méthode qu'on à vu à date au cours.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^2} + x^2}{-2x^3 + 3x}$

solution:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+x^2}+x^2}{-2x^3+3x}\times\frac{1/x^3}{1/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^4}+1/x}{-2+3/x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{1+0}+1/x}{-2+0}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\sin(x-1)}{(x-1)^2}$

solution: Premièrement on sépare la limite. Ceci est valide pourvu que les deux limites individuelles existent.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\sin(x-1)}{(x-1)^2}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{x-1}\right)\times\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right)$$

Ensuite on évalue chacune.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

La limite désirée est 2×1. Note que si $x\to 1$ alors $x-1\to 0$, donc si on pose $h=x-1$ on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ par un résultat vu au cours.

[**4**] **4.** Trouver les dérivées suivantes. Vous pouvez utiliser n'importe quelle méthode qu'on à vu à date au cours. Ce n'est pas nécessaire de simplifier votre réponse.

a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{re^r+2\pi^2}{r^3+3}\right)$

solution:

$$\frac{\left(re^r+2\pi^2\right)'\left(r^3+3\right)-\left(re^r+2\pi^2\right)\left(r^3+3\right)'}{\left(r^3+3\right)^2}=\frac{\left((1)(e^r)+r(e^r)+0\right)'\left(r^3+3\right)-\left(re^r+2\pi^2\right)\left(3r^2+0\right)}{\left(r^3+3\right)^2}$$

b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos(e^{(x^4)})\right)$

solution:

$$-\sin(e^{x^4})\times e^{x^4}\times 4x^3$$

[**2**] **5.** Trouver l'équation de toutes les droites qui sont tangentes à $f(x)=2x^2$ et qui passent par le point $(0,-8)$.

(indice: trouver la pente de la droite tangente à $f(x)$ à $x = a$, ensuite trouver l'équation de la droite tangente à $x = a$, ensuite trouver la (les) valeur(s) de a tel que cette droite passe par le point donné.)

solution: On trouve la dérivée $f'(x) = 4x$. Lorsque $x = a$ la pente est $4a$. Lorsque $x = a$ on a $y = f(a) = 2a^2$. La droite a une pente de $4a$ et passe par $(a, 2a^2)$. Alors l'équation est donnée par:

$$\begin{aligned}(y - 2a^2) &= 4a(x - a)\\ y &= 4ax - 2a^2\end{aligned}$$

La droite devrait passer par $(0, -8)$, alors on substitu $(0, -8)$ dans l'équation de la droite (l'une ou l'autre version).

$$\begin{aligned}(-8) &= 4a(0) - 2a^2\\ a^2 &= 4\\ a &= \pm 2\end{aligned}$$

Alors il y a deux droites

$$\begin{aligned}y &= 4(2)x - 2(2)^2 = 8x - 8\\ y &= 4(-2)x - 2(-2)^2 = -8x - 8\end{aligned}$$

Solution alternative:
Considérer un point sur la courbe avec $x = a$; alors $y = 2a^2$ donc on a le point $(a, 2a^2)$.
La pente à $x = a$ est $f'(a) = 4a$. La pente de la droite liant $(a, 2a^2)$ à $(0, -8)$ est $(2a^2 - (-8)) / (a - 0)$.
Les deux pentes doivent être égal.

$$\begin{aligned}4a &= \frac{2a^2 - (-8)}{a - 0}\\ 4a^2 &= 2a^2 + 8\\ a^2 &= 4\\ a &= \pm 2\end{aligned}$$

On a droites (enore).

$$y - (-8) = 4a(x - 0)\begin{cases}y = 4ax - 8 = 8x - 8\\ y = 4ax - 8 = -8x - 8\end{cases}$$

[2] **6.** Trouver une expression pour y' en termes de x et y, étant donné que $y^4 = e^x + x^2$.

solution:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^4\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x + x^2\right)\\ 4y^3 \times y' &= e^x + 2x\\ y' &= \frac{e^x + 2x}{4y^3}\end{aligned}$$

[**2**] **7.** Soit la fonction $f(x) = x^{(e^x)}$. Trouver une expression pour $f'(x)$ en terms de x seulement. (indice: dérivation logarithmique.)

solution: avec dérivation logarithmique

$$\begin{aligned}
y &= x^{(e^x)} \\
\ln(y) &= \ln(x^{(e^x)}) = e^x \ln(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(y)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x \ln(x)) \\
\frac{1}{y}y' &= e^x \times 1/x + e^x \ln(x) \\
y' &= y\left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln(x)\right) \\
y' &= x^{(e^x)}\left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

avec une transformation et règle de chaîne

$$\begin{aligned}
x^{(e^x)} &= e^{\ln\left(x^{(e^x)}\right)} = e^{e^x \ln(x)} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{(e^x)}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{e^x \ln(x)}\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{(e^x)}\right) &= e^{e^x \ln(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x \ln(x)) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{(e^x)}\right) &= e^{e^x \ln(x)} (e^x 1/x + e^x \ln(x)) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{(e^x)}\right) &= x^{(e^x)}\left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

[**3**] **8.** Une boîte avec base carré change sa hauteur et le côté de sa base de façon continu. Lorsque le côté de la base mesure 2cm et la hauteur 10cm, le côté de la base augmente à un taux de 1cm/min et le hauteur diminue à un taux de 2cm/min. Quel est le taux de changement de volume à ce moment?

solution: Dessiner une boîte avec une base qui mesure a par a, et avec hauteur h. Le volume est $V = a \times a \times h = a^2 h$. Dériver:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2 h\right) \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\right) h + a^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h) \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= 2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}h + a^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Toute quantité à la droite est connue, alors on a $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ directement. Les unités sont tous cm et sec, alors ce n'est pas nécessaire de convertir.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2(2)(1)(10) + (2)^2(-2) = 32$$