Géométrie vectorielle

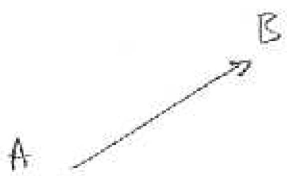
Résumé

En 1637, René Descartes introduit l'usage de coordonnées pour localiser les points du plan et de l'espace. Début de la géométrie analytique.

Au 19e s., la terminologie de vecteur est introduite par Hamilton. Suite aux travaux de J.W. Gibbs et O. Heaviside, s'est développée la géométrie vectorielle.

Description géométrique des vecteurs:

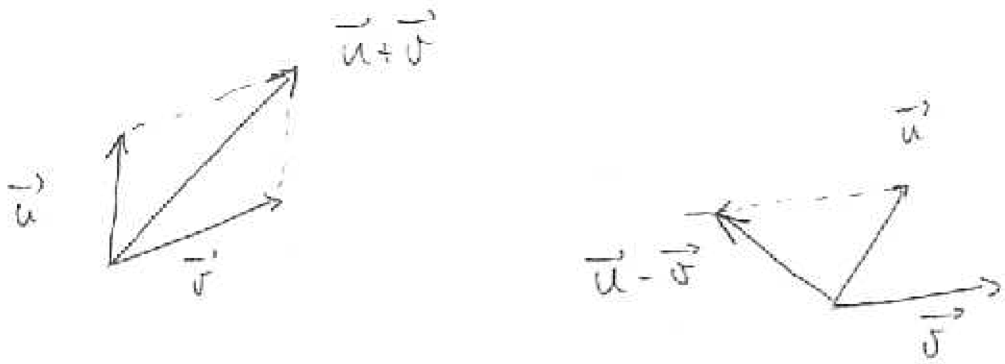
un vecteur est représenté par des flèches



flèche $\overrightarrow{AB}$: segment orienté reliant A à B.

Deux flèches représentent le même vecteur si elles ont même longueur, même direction et même sens.

Les opérations algébriques (+, −, multiplication par un nb. réel) définies et étudiées par des méthodes géométriques



loi du parallélogramme.

mult. par un scalaire.

<u>Proposition</u>: Pour deux vecteurs non nuls $\vec v$ et $\vec w$, les conditions suivantes sont équivalentes:

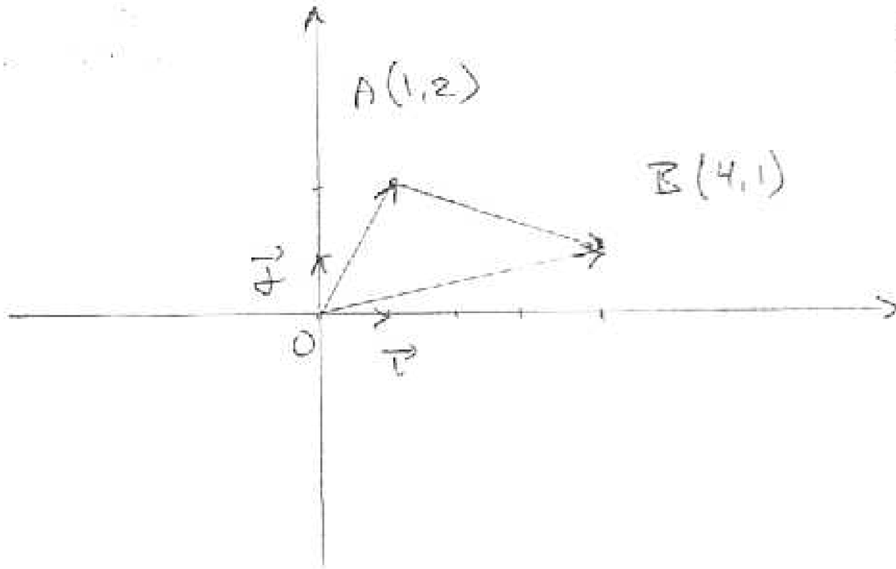
① $\vec v$ et $\vec w$ sont parallèles.

② $\vec v$ est un mult. scal. de $\vec w$ <u>et</u> $\vec w$ est un mult. scal. de $\vec v$

③ $\vec v$ — <u>ou</u> —

<u>Description analytique</u>: Les vecteurs et les opérations vectorielles sont décrits en terme de coordonnées, donc de nombres, après avoir fixé une origine et un système d'axes.

Exemple ds le plan $\mathbb{R}^2$.



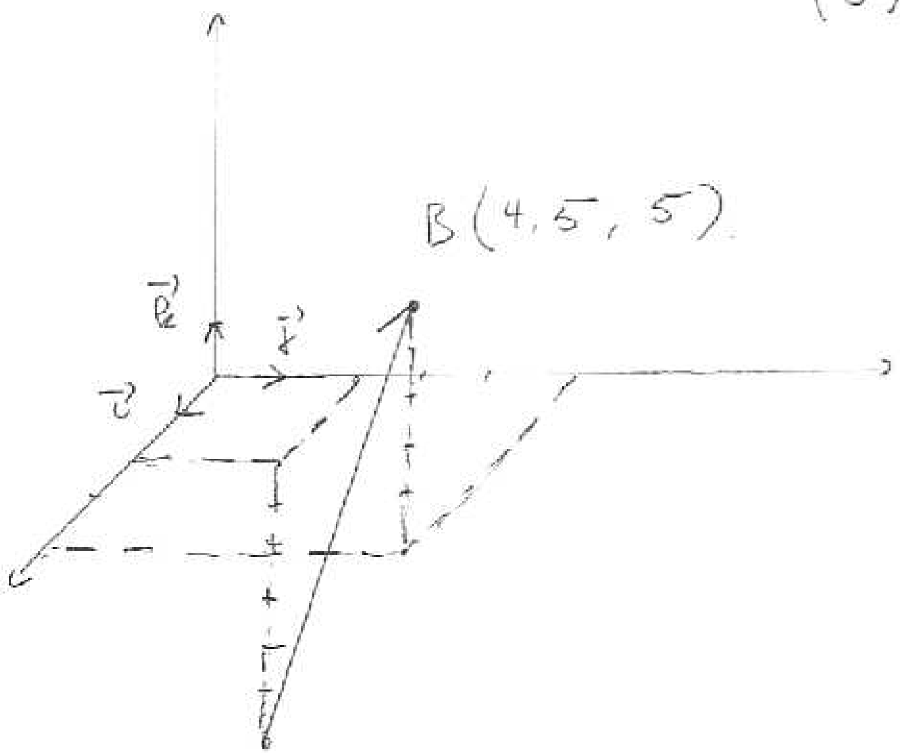
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ds l'espace $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$



Terminologie : si $x = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

alors x_1, x_2, x_3 sont les composantes ou coordonnées de x par rapport à $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

De manière semblable, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$.

si $x \in \mathbb{R}^2$.

Prop : Soit $n = 2$ ou 3.

a) Deux vecteurs x et y sont égaux ssi ils ont les mêmes composantes, i.e. $x_i = y_i$, $1 \leq i \leq n$.

b) Si $x \in \mathbb{R}^n$, alors la longueur de x, dénotée $\|x\|$, est le nb. $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

c) $x = 0$ ssi $\|x\| = 0$

d) Si $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|ax\| = |a| \, \|x\|$

Addition vectorielle et multiplication par un scalaire.

Si x et $y \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur somme $x+y$ est le vecteur dont les composantes sont $x_i + y_i$, $1 \leq i \leq n$.

- Si $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire et $x \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur cx est le vecteur dont les composantes sont cx_i, $1 \leq i \leq n$.

Rem: le vecteur nul $0 \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur dont toute les composantes sont nulles.

Proposition : Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$, alors

a) $x + y = y + x$, b) $(x+y)+z = x+(y+z)$

c) le vecteur $(-1)x = -x$ est tq. $x + (-x) = 0$.

d) $c(dx) = (cd)x$ e) $c(x+y) = cx + cy$

f) $(c+d)x = cx + dx$.

Produit scalaire et projection orthogonale

A. Produit scalaire

Def: Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire de x et y, denoté $x \cdot y$ (ou $(x|y)$), est le nb. réel

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposition : Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

a) $x \cdot y = y \cdot x$ b) $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x \cdot (ay)$

c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ d) $x \cdot x = \|x\|^2 \geq 0$.

En particulier, $x \cdot x = 0$ ssi $x = 0$

Exemple : Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

- $\|x+y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\, x \cdot y$

- $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz

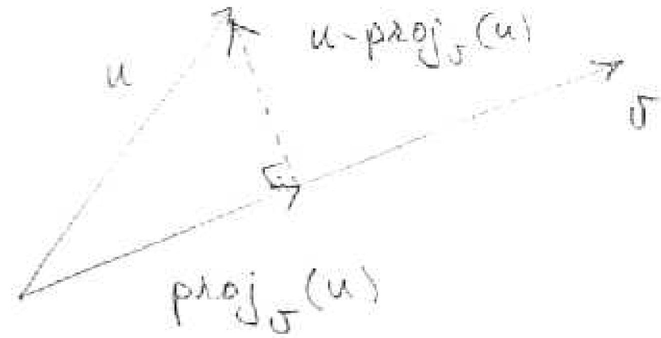
Déf : Si x, y sont deux vecteurs non nuls, alors l'angle entre x et y est l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tq

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$$

En particulier, x et y sont perpendiculaires, $x \perp y$ ssi $x \cdot y = 0$.

B. Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre.

$u, v \in \mathbb{R}^n$.
$v \neq 0$.



Comme $\mathrm{proj}_v(u) \mathbin{//} v$, il existe un scalaire $t \in \mathbb{R}$ tq.

$\mathrm{proj}_v(u) = tv$. Comme $(u - \mathrm{proj}_v(u)) \perp v$, on a:

$$0 = (u - tv)\cdot v = u \cdot v - t(v \cdot v) = u\cdot v - t\|v\|^2$$

D'où $(\|v\| \neq 0)$, $t = \dfrac{u \cdot v}{\|v\|^2}$ et donc.

Prop: Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, alors la projection orthogonale de u sur v est le vecteur

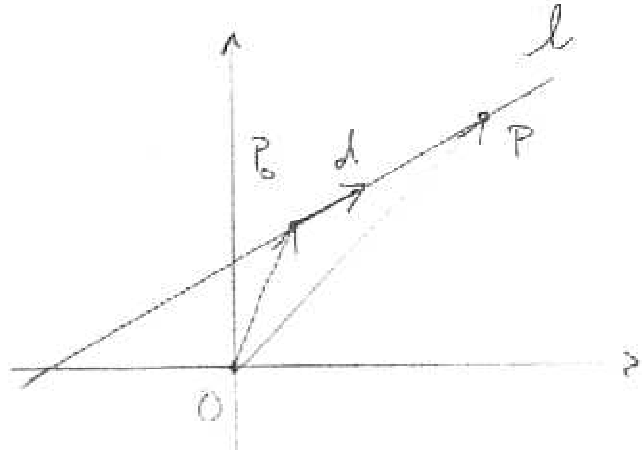
$$\mathrm{proj}_v(u) = \frac{u\cdot v}{\|v\|^2}\, v$$

Rem: 1) $\mathrm{proj}_v(v) = v$

2) $u = \underbrace{\mathrm{proj}_v(u)}_{\mathbin{//} v} + \underbrace{(u - \mathrm{proj}_v(u))}_{\perp v}$

C. Droites dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

C.1 Cas de $\mathbb{R}^2$.



droite ℓ passant par $P_0(x_0, y_0)$ et de vecteur direction $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Si $P(x,y) \in \ell$, alors $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot d$. D'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$ Equ. vectorielle de ℓ

et $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ Equ. paramétriques de ℓ.

En éliminant le paramètre t, on obtient l'équ. cartésienne de la droite ℓ:

$$bx + ay = ay_0 + bx_0 = c$$

C.2 Cas de $\mathbb{R}^3$:

Equ. paramétiques de la droite ℓ passant par $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur direction $d = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = y_0 + tc \end{cases}$$

Exemples

1. Déterminer si les deux droites l_1 et l_2 de $\mathbb{R}^3$ se coupent.

Equ. param. de l_1 et l_2 :

$$l_1 \begin{cases} x = x_1 + t\,a_1 \\ y = y_1 + t\,b_1 \\ z = z_1 + t\,c_1 \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} x = x_2 + s\,a_2 \\ y = y_2 + s\,b_2 \\ z = z_2 + s\,c_2 \end{cases}$$

Si $P(x,y,z)$ est un pt d'intersection de l_1 et l_2, alors $P \in l_1$ et $P \in l_2$, d'où il doit exister t et $s \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} x_1 + t\,a_1 &= x_2 + s\,a_2 \\ y_1 + t\,b_1 &= y_2 + s\,b_2 \\ z_1 + t\,c_1 &= z_2 + s\,c_2 \end{aligned}$$

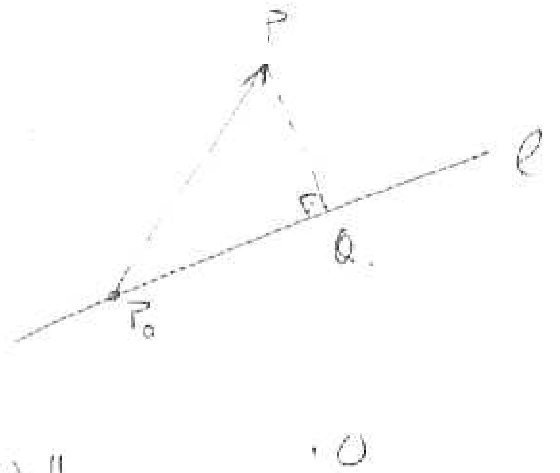
Si ce système de 3 équations à 2 inconnues s et t a une unique solution, l_1 et l_2 se coupent et en utilisant la valeur trouvée de s ou t, on détermine les coord. de P

Si ce syst. n'a pas de sol., les 2 droites ne se coupent pas.

Si ce syst a une infinité de solutions, les deux droites sont confondues.

② Distance d'un point à une droite ℓ

Soit ℓ la droite passant par P_0 et de vecteur direction d. Si $P \in \mathbb{R}^3$, alors la distance de P à ℓ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{QP}$.



Comme

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{P_0P} - \overrightarrow{P_0Q}$$
$$= \overrightarrow{P_0P} - \text{proj}_d(\overrightarrow{P_0P}),$$

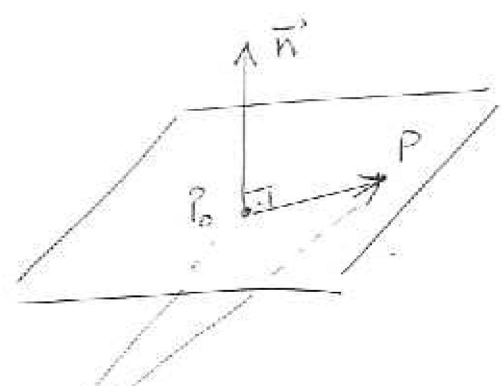
$$\text{dist.}(P, \ell) = \| \overrightarrow{P_0P} - \text{proj}_d(\overrightarrow{P_0P}) \|.$$

Rem: On a: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \text{proj}_d(\overrightarrow{P_0P})$; ce qui permet de calculer facilement les coord. de Q.

D. Plan de $\mathbb{R}^3$

Le plan π passant par P_0 et normal au vecteur $\vec{n} \neq 0$ est l'ensemble des points P tq. $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$, càd

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$



D'où si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et $P(x, y, z)$, on a:

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

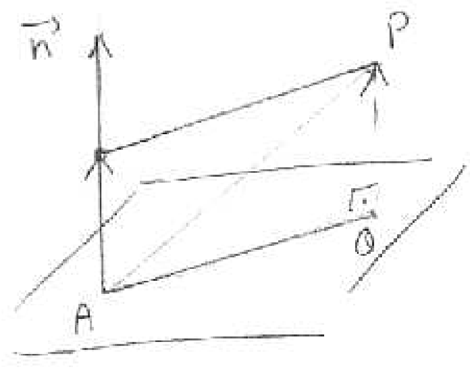
D'où l'équ. cartésienne du plan π :

$$ax + by + cz = d \quad (= ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Rem: Si π_1 et π_2 sont deux plans de $\mathbb{R}^3$, l'angle entre π_1 et π_2 est par définition l'angle aigu déterminé par leurs deux droites normales.

Exemple: distance d'un pt P au plan π d'équ.

$ax + by + cz = d$.



1re méthode: Si $A \in \pi$, alors

$\text{dist}(P, \pi) = \| \vec{QP} \| = \| \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{AP}) \|$

2e méthode:

le point Q est l'intersection de π et de la droite passant par P et de vecteur directeur $\vec{n}$. Lorsque le pt Q est trouvé, il suffit de calculer la longueur de $\vec{PQ}$.

E. Produit vectoriel

Notation : $\mathbb{R}^3 \ni u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$

Def. : Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors le produit vectoriel de u par v, dénoté $u \times v$, est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit vectoriel :

1. $u \times v = - v \times u$ (antisymétrie).
2. $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$; $u \times v$ est orthogonal à u et v.
3. Le produit vectoriel n'est pas associatif

Exp : $\vec{i} \times \underbrace{(\vec{k} \times \vec{k})}_{= \vec{0} \text{ par } ①} = \vec{i} \times \vec{0} = \vec{0}$, mais

$$(\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{k} = (-\vec{j}) \times \vec{k} = -\vec{i}.$$

<u>Exemple</u>: Équ. du plan passant par O et contenant les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; d'où l'équ du plan est $-y + 2z = 0$.

<u>Théo</u> (Identité de Lagrange)

Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, alors $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$

<u>Dém</u> : par calcul !

D'où, $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta$

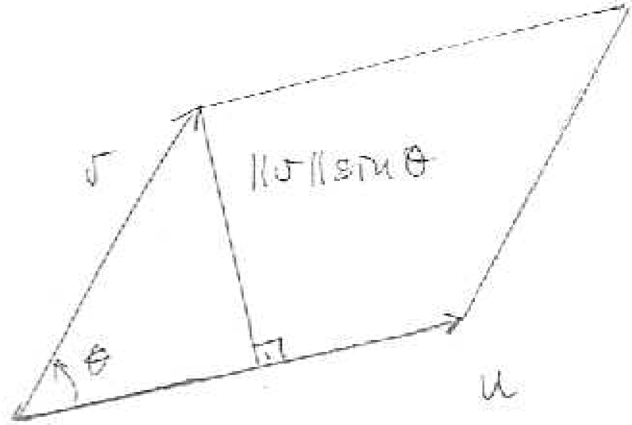
$= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta$

Comme $\theta = \measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$ et que $\sin \theta \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$

on a :
$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

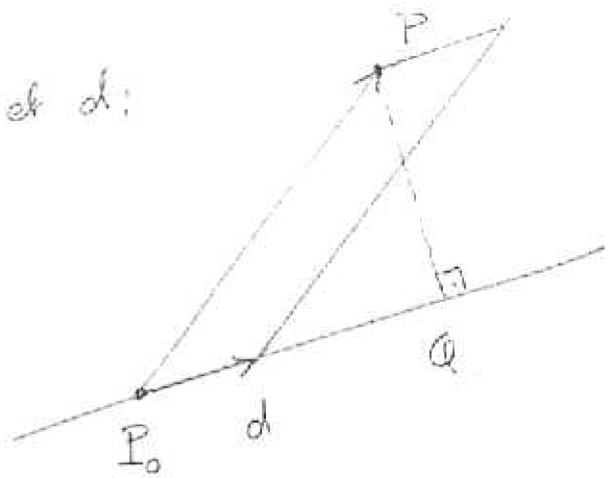
<u>Géométriquement</u> :

$\|u \times v\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v.



En particulier $\|u \times v\| = 0$ ssi $u \parallel v$.

Exemple : distance d'un point P à la droite passant par P_0 et de vecteur directeur d



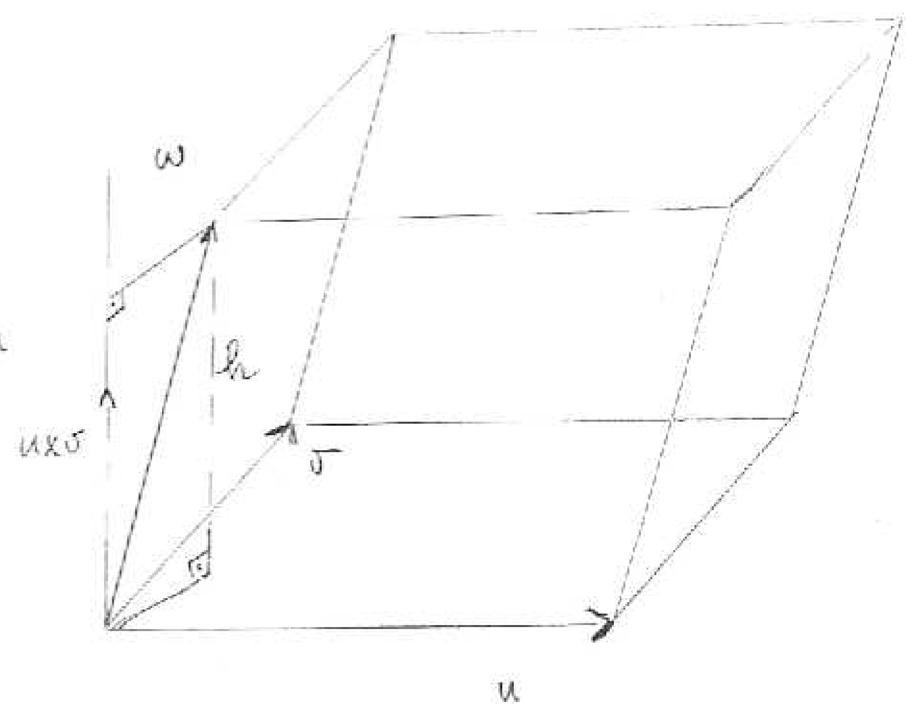
Aire du ▱ construit sur $\overrightarrow{P_0P}$ et d :

$$\|\overrightarrow{P_0P} \times d\| = \|d\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|$$

D'où
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times d\|}{\|d\|}$$

Soient u, v et w 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit P le parallélépipède qu'ils déterminent.

Volume de P = surface base x hauteur



$$\text{Vol}(P) = \text{surface base} \times \text{hauteur}$$

$$= \|u \times v\| \times \|\text{proj}_{u\times v}(w)\|$$

$$= \|u\times v\| \cdot \left\| \frac{(u\times v)\cdot w}{\|u\times v\|^2}\, u\times v \right\| = |(u\times v)\cdot w|.$$

D'où Vol(P) est la valeur absolue du produit mixte des 3 vecteurs u, v et w.

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, alors on a:

$$|(u\times v)\cdot w| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

Rem. Si u, v et w sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors

$$u \times (v\times w) = (u\cdot w)v - (u\cdot v)w$$