uOttawa

Faculté des Sciences

Département de mathématiques et de statistique

Calcul Différentiel et Intégral II (MAT1722–C)

EXAMEN FINAL (11 décembre 2017)

Professeur : Lucile Devin

NOM, Prénom : ____________________

Numéro d'étudiant : ____________________

- Durée : 3 heures.
- Aucune note n'est permise.
- Seules les calculatrices de base de type TI 30, TI 34, Casio fx-260 ou Casio fx-300 sont autorisées.
- L'examen comporte deux parties pour un total de 50 points.
  - La Partie I est composée de douze questions à choix multiple (pour un total de 24 points). Encercler la réponse correcte.
  - La Partie II est composée de cinq questions à développement (pour un total de 26 points). Pour la Partie II, prenez soin de bien rédiger vos solutions dans l'espace prévu. La lisibilité et la justification des calculs seront pris en compte dans la notation.
- Si vous avez besoin de plus de place pour écrire les solutions vous pouvez continuer au verso, dans ce cas, il est conseillé d'indiquer au correcteur où se trouve la suite de la réponse.
- Vous pouvez utiliser la dernière page (15) et les versos comme papier brouillon.
- Il est conseillé de se relire pour éviter les erreurs de calcul.
- Les pages ne doivent pas être séparées.
- *Veuillez lire ci-dessous :*
  Les téléphones cellulaires, les appareils électroniques non autorisés ou les notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert) ne sont pas autorisés pendant cet examen. Les téléphones et les appareils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Ne les gardez pas en votre possession, par exemple dans vos poches. Si vous êtes pris avec un tel appareil ou document, des allégations de fraude scolaire seront déposées, ce qui pourrait entrainer l'obtention d'un 0 (zéro) pour l'examen.
  En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez avoir lu et vous assurer de respecter l'énoncé ci-dessus.
  Signature : ____________________

Bonne chance !

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

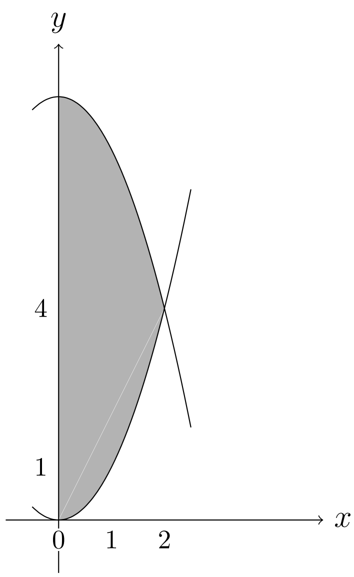
(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Partie I : Questionnaire à choix multiple. [$12 \times 2 = 24$ points]

Question 1. L'aire de la région située au dessus du graphe de $y = x^2$ et en dessous du graphe de $y = 8 - x^2$ dans le premier quadrant est

A. $\frac{27}{3}$; B. $\frac{29}{3}$; C. $\frac{37}{3}$; D. $\frac{41}{3}$; E. $\frac{35}{3}$; F. $\frac{32}{3}$.

Réponse : **F.** Commençons par représenter la région :



On voit que les courbes s'intersectent au point $x = 2$, $y = 4$, donc la zone délimitée dans le premier quadrant est en fait pour $0 \leq x \leq 2$.

Donc l'aire de la région est donnée par l'intégrale

$$\int_0^2 (8 - x^2 - x^2)dx = \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{2 \times 16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Question 2. Soit $\mathcal{R}$ la région au dessus de la parabole $y = x^2$ et en dessous de la droite $y = 2x$. Le solide $\mathcal{B}$ est obtenu par la révolution de $\mathcal{R}$ autour de l'axe $y = 4$. Alors le volume de $\mathcal{B}$ est calculé par l'intégrale

A. $\pi \int_0^2 \left((4 - x^2)^2 - (4 - 2x)^2\right) dx$;

B. $\pi \int_0^4 \left((4 - x^2)^2 - (4 - 2x)^2\right) dx$;

C. $\pi \int_0^2 \left((4 + x^2)^2 - (4 + 2x)^2\right) dx$;

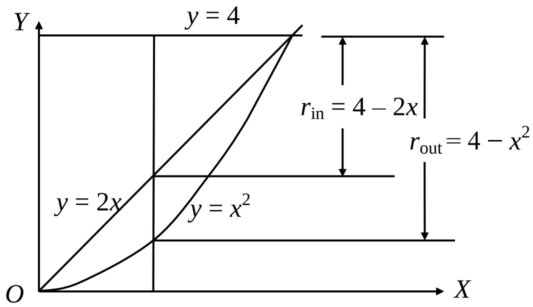
D. $\pi \int_0^4 \left((4 + x^2)^2 - (4 + 2x)^2\right) dx$;

E. $\pi \int_0^2 \left((4 - 2x)^2 - (4 - x^2)^2\right) dx$;

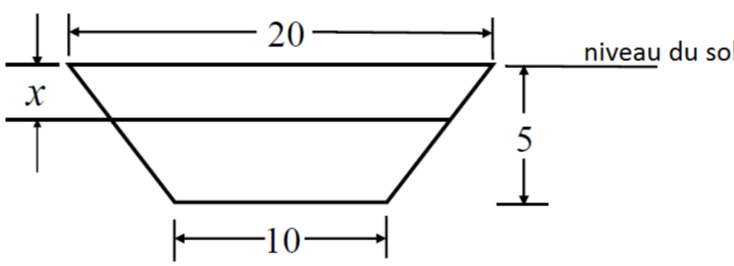
F. $\pi \int_0^2 \left((4 + x^2)^2 - (4 - 2x)^2\right) dx$.

Réponse : **A.** On utilise la méthode des anneaux :

Les courbes se croisent en $x = 0$ et $x = 2$ L'aire d'un anneau au niveau de $0 \leq x \leq 2$ est $A(x) = \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)$. On a $r_{ext}(x) = 4 - x^2$; $r_{int}(x) = 4 - 2x$.



Question 3. Un bassin de la forme d'une pyramide tronquée orientée vers le bas est rempli d'eau. La surface supérieure du bassin, qui se trouve au niveau du sol est un carré de coté 20 mètres, le fond du bassin est un carré de coté 10 mètres. La profondeur du bassin est 5 mètres. On note ρ la densité de l'eau (en kg/m^3), et g l'accélération gravitationnelle (en m/s^2). Soit x la distance entre une couche horizontale d'eau dans le bassin et le niveau du sol.



Alors le travail requis pour pomper l'eau du bassin vers un point à 2 mètres au dessus du niveau du sol est calculé par l'intégrale

A. $\rho g \int_0^5 (20-2x)^2(7-x)dx$;

B. $\rho g \int_0^7 (20-2x)^2(x+2)dx$;

C. $\pi\rho g \int_0^7 (20-2x)^2(7-x)dx$;

D. $\rho g \int_0^5 (20-2x)^2(x+2)dx$;

E. $\pi\rho g \int_0^5 (20-2x)^2(7-x)xdx$;

F. $\pi\rho g \int_0^5 (20-2x)^2(x+2)dx$.

Réponse : **D.** une couche horizontale d'eau dans le réservoir est un carré de coté $L(x) = 10 + 2\times(5-x) = 20-2x$. Donc si elle a épaisseur dx, son volume est $dV(x) = L(x)^2dx = (20-2x)^2dx$, son poids est donc $dP(x) = \rho g(20-2x)dx$. Finalement le travail requis pour pomper cette couche à deux mètre au dessus du niveau du sol est $dW(x) = \rho g(20-2x)(x+2)dx$, le travail total est l'intégrale entre 0 et 5 :

$$W = \rho g \int_0^5 (20-2x)^2(x+2)dx.$$

Question 4. On rappelle que la longueur de l'arc $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, est calculé par la formule

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

La longueur de l'arc $y = \ln(x) - \frac{x^2}{8}$, $1 \leq x \leq e$, est

A. $\frac{1}{8}(e^2 + 7)$; B. $\frac{1}{8}(e^2 + 5)$; C. $\frac{1}{8}(e^2 + 1)$;

D. $\frac{1}{4}(e^2 + 7)$; E. $\frac{1}{4}(e^2 + 5)$; F. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

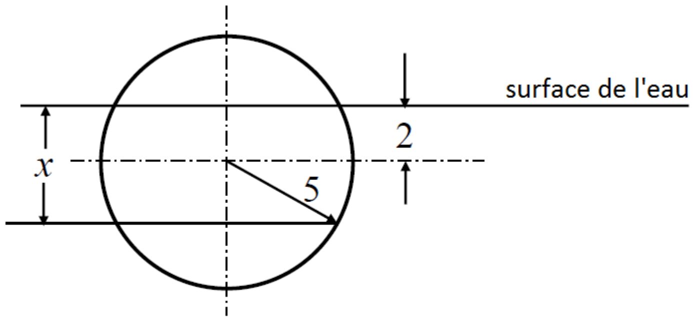
Réponse : **A.** On utilise la formule. On a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

donc

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{16}} dx = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}} dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} + \frac{x}{4} dx \\ &= \left[\ln(x) + \frac{x^2}{8}\right]_1^e = 1 + \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(e^2 + 7). \end{aligned}$$

Question 5. On immerge partiellement une plaque de la forme d'un disque de rayon 5 mètres dans l'eau, de densité ρ kg/m^3. La plaque est immergée verticalement de façon à ce que le centre se situe à 2 mètres sous le niveau de l'eau.



Soit x la profondeur d'une bande horizontale immergée. On note g l'accélération gravitationnelle. Alors la force hydrostatique agissant sur le disque est calculée par l'intégrale

A. $2\rho g \int_{-2}^{5} x\sqrt{5^2-(x-5)^2}dx$;

B. $2\rho g \int_{0}^{7} (x+2)\sqrt{5^2-(x-5)^2}dx$;

C. $2\rho g \int_{3}^{10} (x+2)\sqrt{5^2-x^2}dx$;

D. $2\rho g \int_{-2}^{5} x\sqrt{5^2-(x-2)^2}dx$;

E. $2\rho g \int_{3}^{10} x\sqrt{5^2-x^2}dx$;

F. $2\rho g \int_{0}^{7} x\sqrt{5^2-(x-2)^2}dx$.

Réponse : F. La surface d'une bande mince de la plaque à la profondeur x est $dS(x) = 2\sqrt{5^2-(x-2)^2}dx$ (d'après le théorème de Pythagore). La force hydrostatique exercée sur cette bande mince est $dF(x) = x\rho g dS(x)$, pour x variant entre 0 et 7. Donc la force hydrostatique appliquée sur la plaque entière est

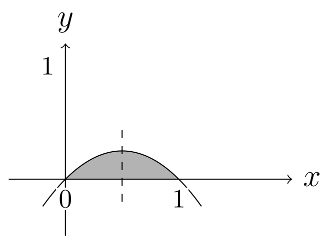
$$\int_0^7 x\rho g 2\sqrt{5^2-(x-2)^2}dx.$$

Question 6. Le centre de masse de la région située sous la parabole $y = x - x^2$ et au dessus de l'axe des x est

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$; B. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$; C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{15}\right)$;

D. $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right)$; E. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)$; F. $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$.

Réponse : **E.** On commence par visualiser la région :



Cette région est symétrique par rapport à l'axe $x = 1/2$, on peut donc déduire directement que l'abscisse du centre de masse est $\frac{1}{2}$. Faisons tout de même tous les calculs : On commence par calculer la masse de la plaque :

$$m = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Le moment par rapport à l'axe des x de la plaque est

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Le moment par rapport à l'axe des y de la plaque est

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^1 x(x - x^2)dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

On en déduit que les coordonnées du centre de masse sont

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{6}{12}, \frac{6}{60}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right).$$

Question 7. On considère l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$. Lequel des arguments suivants est vrai ?

A. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} < \frac{2}{x}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{2}{x}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ converge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ converge.

B. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} < \frac{2}{x}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{2}{x}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ diverge.

C. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ converge.

D. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} > \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$ diverge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ diverge.

E. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} > \frac{1}{2x}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ diverge.

F. Comme $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} > \frac{1}{2x}$ sur $]0,1[$, et $\int_0^1 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ converge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x}dx$ converge.

Réponse : **E.** Pour $0 < x \leq 1$, on a $\sqrt{x}+1 \geq 1$, et $x^2+x \leq 2x$, donc $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x} > \frac{1}{2x}$. De plus, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge (intégrale de Riemann), donc par test de comparaison, on conclut.

Question 8. On utilise la méthode d'Euler de pas $h = 0.05$ pour trouver une approximation de $y(0.1)$ où $y(t)$ est la solution du problème à condition initiale $y' = (2t-1)(y+1)$, $y(0) = 1$.

Laquelle des valeurs suivantes est la plus proche de la réponse ? $y(0.1) \simeq$

A. 0.905 ; B. 0.845 ; C. 0.815 ; D. 0.742 ; E. 0.707 ; F. 0.685 .

Réponse : **C.** On utilise la méthode d'Euler pour $y_0 = 1$, $h = 0.05$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.1$ et $F(x,t) = (2t-1)(y+1)$. Alors

$$y_1 = y_0 + F(y_0,t_0)h = 1 + (-1) \times 2 \times 0.05 = 0.9$$
$$y_2 = y_1 + F(y_1,t_1)h = 0.9 + (-0.9) \times 1.9 \times 0.05 = 0.815$$

Question 9. La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-1)^n 5^n}{3^{2n}}$ est $S =$

A. $\frac{43}{14}$; B. $\frac{45}{14}$; C. $\frac{29}{9}$; D. $\frac{25}{7}$; E. $\frac{13}{9}$; F. $\frac{23}{7}$.

Réponse : **B.** On reconnait des séries géométriques :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-1)^n 5^n}{3^{2n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{2^n}{3^{2n}} - \frac{(-5)^n}{3^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3^2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{3^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Ce sont bien deux séries géométriques, la première a premier terme 2 et raison $\frac{2}{9}$ (qui vérifie bien $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$), et la seconde a premier terme 1 et raison $\frac{-5}{9}$ (qui vérifie bien $\left|\frac{-5}{9}\right| < 1$), donc ces deux séries sont convergentes, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-1)^n 5^n}{3^{2n}} &= \frac{2}{1-\frac{2}{9}} + \frac{1}{1+\frac{5}{9}} \\ &= \frac{18}{9-2} + \frac{9}{9+5} = \frac{18\times 2+9}{14} = \frac{45}{14}\end{aligned}$$

Question 10. L'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$ est

A. $-1.5 \leq x \leq 1.5$; B. $-1.5 < x < 1.5$;

C. $-1.5 < x \leq 1.5$; D. $-1.5 \leq x < 1.5$;

E. $-\infty < x < +\infty$; F. La série ne converge que pour $x = 0$.

Réponse : **B.** On commence par chercher le rayon de convergence de la série, pour cela on utilise le test du quotient pour $a_n = \frac{2^n}{3^n} x^n$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n x^n}\right| \\ &= \frac{2}{3}|x|.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{3}|x|$. Ainsi la série converge absolument pour $|x| < \frac{3}{2}$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la série est 1.5.

Il reste à déterminer ce qu'il se passe en ± 1.5. En 1.5 la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

qui est divergente par le premier critère de divergence.

En -1.5 la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \left(\frac{-3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

qui est aussi divergente par le premier critère de divergence.

Ainsi l'intervalle de convergence de la série est $-1.5 < x < 1.5$.

Question 11. Soit $f(x,y) = x^2y^2 + 3xy + y^3$ le vecteur gradient de $f(x,y)$ au point $x = 2$, $y = -1$ est

A. $(1,-1)$; B. $(-1,1)$; C. $(-1,-1)$;

D. $(1,1)$; E. $(3,1)$; F. $(1,3)$.

Réponse : **D.** Pour calculer le vecteur gradient, on calcule les dérivées partielles : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3x + 3y^2$$

Le vecteur gradient est $\nabla f(x,y) = (2xy^2 + 3y, 2x^2y + 3x + 3y^2)$. Au point $x = 2$, $y = -1$ on trouve

$$\nabla f(2,-1) = (4-3, -8+6+3) = (1,1)\,.$$

Question 12. La dérivée directionnelle de la fonction $z = \ln(2x^2 - y^2)$ au point $x = 3$, $y = 4$, dans la direction du vecteur $\mathbf{u} = (3,4)$ est

A. 1 ; B. $\frac{-2}{5}$; C. $\frac{-1}{5}$; D. $\frac{2}{5}$; E. -2 ; F. 2.

Réponse : **D.** Pour calculer une dérivée directionnelle, on commence par calculer le vecteur gradient, donc les dérivées partielles : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 - y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2x^2 - y^2}.$$

Au point $x = 3$, $y = 4$ on trouve

$$\nabla f(3,4) = \left(\frac{12}{18-16}, \frac{-8}{18-16}\right) = (6,-4)\,.$$

La norme du vecteur $\mathbf{v} = (3,4)$ est $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Donc le vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{v}$ est $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. La dérivée directionnelle de $f(x,y)$ au point $x = 3$, $y = 4$ dans la direction de $\mathbf{v}$ est donc

$$f'_{\mathbf{u}} = \nabla f(3,4) \cdot \mathbf{u} = 6 \times \frac{3}{5} + (-4) \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

Partie II : Questions à développement. [26 points]

Exercice 1. [5 points]

Utiliser la définition de l'intégrale impropre pour déterminer si l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donner sa valeur.

Réponse : On a par définition

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \lim_{t\to+\infty}\Big[\frac{-1}{2(x^2+1)}\Big]_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{2(t^2+1)}-\frac{-1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Comme la limite existe, on en déduit que l'intégrale est convergente, et on a $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. [5 points]

Trouver la fonction $y(t)$, solution du problème à valeur initiale $y' = y\sin(t)$, $y(0) = -1$.

Réponse : On reconnaît une équation différentielle séparable. La solution stationnaire est $y(t) = 0$, donc la solution que l'on cherche ne s'annule pas et on peut diviser par y sans risque dans l'équation.

Si y n'est pas la solution stationnaire, l'équation est équivalente à

$$\frac{dy}{y} = \sin(t)dt.$$

On prend les primitives :

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \sin(t)dt \\ \ln|y| &= -\cos(t) + C \\ y &= Ae^{-\cos(t)} \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont $y(t) = Ae^{-\cos(t)}$ où A est une constante. D'après la condition initiale, $y(0) = -1$ donc $A = -e$. Ainsi la solution du problème à condition initiale est $y(t) = -e^{1-\cos(t)}$.

Exercice 3. [6 points]

Utiliser une méthode de test appropriée pour déterminer pour chacune des séries suivantes si elle est convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{n^2+1}$.

   Réponse : C'est une série à termes positifs. On va comparer la suite $\frac{2n-\sqrt{n}}{n^2+1}$ avec la suite $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ dont la série est divergente (série harmonique), on veut donc minorer notre suite. On a pour tout $n \geq 1$
   $$2n - \sqrt{n} \geq n \text{ et } n^2 + 1 \leq 2n^2$$
   donc
   $$\frac{2n-\sqrt{n}}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \geq 0.$$
   La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n}$ est divergente donc par test de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{n^2+1}$ est aussi divergente.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$. **Réponse :** C'est une série alternée, en effet étudions la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$, $f(x)$ est à valeurs positives et tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on a
   $$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}} < 0$$
   Donc la suite $b_n = f(n)$ est bien décroissante, à valeurs positives, de limite nulle. On conclut grâce au critère des séries alternées que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ est convergente.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$. **Réponse :** On applique le test du quotient, on a
   $$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \left(\frac{n+2}{3n+3}\right)^{n+1} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n = \frac{n+2}{3n+3} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{3n}{3n+3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\end{aligned}$$
   On a besoin de calculer $\lim_{n\to\infty} \left(1 + a\frac{1}{n}\right)^n$ pour $a = 1$, et 2. On le fait en utilisant le logarithme :
   $$\ln\left(\left(1 + a\frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + a\frac{1}{n}\right)$$
   On utilise la série de MacLaurin de $\ln(1 + X)$ (car quand $n \to \infty$, $\frac{1}{n}$ se rapproche de 0) On a $\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \ldots$, donc
   $$n \ln\left(1 + a\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \ldots\right) = a + \frac{a^2}{2n} + \ldots \to_{\nLeftarrow\to\infty} a.$$
   Finalement on a montré que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + a\frac{1}{n}\right)^n = e^a$. Donc
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{e}\frac{1}{e} = \frac{1}{3} < 1$$
   Donc d'après le test du quotient, la série est convergente.

Exercice 4. [6 points]

La série de MacLaurin de la fonction $\sin(x)$ est

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

1. [4 points] Trouver les trois premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de la fonction $F(x) = \int_0^x \sin(2t^2)dt$. **Réponse :** En prenant $x = 2t^2$ dans la formule on a

$$\begin{aligned}\sin(2t^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}t^{4n+2}}{(2n+1)!} \\ &= 2t^2 - \frac{4t^6}{3} + \frac{4t^{10}}{15} - \dots\end{aligned}$$

D'après le théorème d'intégration des séries entières, on peut calculer l'intégrale terme par terme :

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin(2t^2)dt &== \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{2^{2n+1}t^{4n+2}}{(2n+1)!}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{3! \times 7}x^7 + \frac{32}{5! \times 11}x^{11} - \dots \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{21}x^7 + \frac{4}{165}x^{11} - \dots\end{aligned}$$

2. [2 points] Trouver les valeurs des dérivées cinquième et septième de la fonction $F(x)$ en $x = 0$, c'est-à-dire, $F^{(5)}(0)$ et $F^{(7)}(0)$.
Réponse : $F^{(5)}(0) = 0$, $F^{(7)}(0) = 7! \times \left(-\frac{4}{21}\right) = -960$.

Exercice 5. [4 points]

Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $x^2z + xy - yz^3 = -1$ au point $(2, 1, -1)$.

Réponse :

On écrit $F(x, y, z) = x^2z + xy - yz^3 + 1$, alors la surface qui nous intéresse a pour équation $F(x, y, z) = 0$. On vérifie que $F(2, 1, -1) = 4 \times (-1) + 2 \times 1 - 1 \times (-1)^3 + 1 = 0$ Calculons les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = x^2 - 3yz^2.$$

Donc $\frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, -1) = 4 - 3 = 1 \neq 0$, ainsi au moins assez proche du point $(2, 1, -1)$ l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit bien z comme une fonction implicite de x et y.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xz + y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x - z^3.$$

Ainsi le vecteur gradient de la fonction $F(x, y, z)$ au point $(2, 1, -1)$ est

$$\nabla F(2, 1, -1) = (-4 + 1, 2 - (-1)^3, 1) = (-3, 3, 1).$$

L'équation du plan tangent en ce point est donc

$$-3(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z + 1) = 0$$

que l'on peut simplifier en

$$-3x + 3y + z + 4 = 0$$

Vous pouvez utiliser cette page comme brouillon