Mat 1739 Automne 2014

Devoir 1 : à remettre le **jeudi 20 septembre** au début du DGD. Aucun devoir ne sera accepté en retard.

Nom de famille (MAJUSCULES) CORRECTION

Prénom (MAJUSCULES) __________

Numéro d'étudiant __________

En signant ci-dessous, vous déclarez que ce travail est le vôtre et que vous n'avez pas copié le travail d'une autre personne.

Signature __________

Instructions : Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses).

Question 1 (6 Points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$.

(a) (2 Points) Calculez de taux de variation moyen de f sur l'intervalle $[1, 4]$.

Par définition, le TVM de f sur $[1,4]$ vaut $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$.
On a $f(4) = \frac{1}{2} \times 4^2 - 4 - 1 = 3$ et $f(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 - 1 - 1 = -1.5$. On en déduit

$$\begin{aligned}\text{TVM de } f \text{ sur } [1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - (-1.5)}{4 - 1} = \frac{3 + 1.5}{3} &= \frac{4.5}{3} \\ &= \boxed{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(b) (2 Points) Donnez l'équation de la sécante passant par $(1, f(1))$ et $(1 + h, f(1 + h))$, $h \neq 0$.

On note $y = ax + b$ l'équation de la sécante recherchée. D'après le cours, la pente a est donnée par la formule

$$\begin{aligned}a = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) - 1 - (-\frac{3}{2})}{h} &= \frac{\frac{1}{2}(1 + 2h + h^2) - 1 - h - 1 + \frac{3}{2}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h - 1 + \frac{3}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} = \frac{h}{2}.\end{aligned}$$

Pour calculer b, on utilise le fait que le point $(1, f(1))$ est sur la droite. On résout :

$$f(1) = a \times 1 + b \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{h}{2} + b \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2} - \frac{h}{2}.$$

Finalement, l'équation de la droite est

$$\boxed{y = \frac{h}{2}x - \frac{3 + h}{2}}.$$

(c) (2 Points) Estimez le taux de variation instantané de f en $x = 1$ avec $h = \frac{1}{10}$. Géométriquement, à quoi correspond ce taux ?

On remplace h par $\frac{1}{10}$ et $x = 1$ dans la formule trouvée à la question précédente. On obtient

$$\text{TVI } f \text{ en } 1 \approx \frac{\frac{1}{10}}{2} = \boxed{\frac{1}{20}}.$$

Géométriquement, ce taux correspond à la pente de la tangente à la courbe au point $(1, f(1))$.

Question 2 (10 Points)**.** Évaluez les limites suivantes :

(a) (2 Points) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 1}{3x^3 - 5}$

On a

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 1}{3x^3 - 5} = \frac{2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 1}{3 \times 2^3 - 5} = \boxed{-\frac{1}{19}}.$$

(b) (2 Points) $\lim_{x \to 9} \frac{9 - x}{\sqrt{x} - 3}$

$$\lim_{x \to 9} \frac{9 - x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée.}$$

On multiplie utilise l'identité remarquable (pour $x > 0$) $9 - x = (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})$.

$$\lim_{x \to 9} \frac{9 - x}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{-(3 - \sqrt{x})} = \lim_{x \to 9} \frac{3 + \sqrt{x}}{-1} = -(3 + 3) = \boxed{-6}.$$

(c) (4 Points) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée.}$$

On va factoriser le numérateur et le dénominateur. On a $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ (identité remarquable). Pour le dénominateur, on ne reconnaît pas d'identité remarquable, on calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$. On a donc deux racines données par

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1,$$

et on peut factoriser $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Finalement

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(x + 1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{2 + 2}{2 + 1} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

(d) (2 Points) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

On a

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc $\boxed{\text{la limite n'existe pas}}$.

Question 3 (4 Points)**.** Pour quelle valeur de a la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} -x^2 + a & \text{si } x \leq 5 \\ x - 4 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$?

La fonction g est continue sur $]-\infty, 5[$ et sur $]5, +\infty[$ (puisqu'elle coïncide sur ces intervalles avec des fonctions affines, donc continues). Donc pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que g soit continue en $x = 5$. On a

$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = \lim_{x \to 5^-} (-x^2 + a) = -5^2 + a = -25 + a = g(5).$$

et

$$\lim_{x \to 5^+} g(x) = \lim_{x \to 5^+} (x - 4) = 5 - 4 = 1.$$

La fonction g est continue en 5 si $\lim_{x \to 5^-} g(x) = \lim_{x \to 5^+} g(x) = g(5)$. Il faut donc que $-25 + a = 1 \Leftrightarrow a = 1 + 25 = 26$. Donc $\boxed{g \textit{ est continue pour } a = 26 \textit{ uniquement.}}$