

Université d'Ottawa
Département de Mathématiques et Statistiques

MAT 1702C: Méthodes Mathématiques II
Professeur: Pierre-Alain Jacqmin

Premier examen de mi-session – Version A

2 octobre 2018

Nom _____ Prénom _____

Numéro d'étudiant # _____

Instructions:

- (a) Vous avez 80 minutes pour remplir cet examen.
- (b) Vos réponses doivent être soigneusement écrites dans l'espace prévu à cet effet. Le verso des feuilles peut être utilisé comme brouillon. Si vous avez besoin de plus de place pour écrire vos réponses, vous pouvez continuer à rédiger sur le verso de la page, en indiquant **clairement** que cela fait partie intégrante de votre réponse. Dans le cas contraire, le verso des pages ne sera pas corrigé.
- (c) Indiquez votre numéro d'étudiant au dessus de chaque feuille, à l'endroit prévu à cet effet.
- (d) Vos notes de cours, livres, papier brouillon personnel, calculatrices ou autres appareils électroniques sont interdits.
- (e) Vous êtes fortement recommandés d'utiliser un stylo-bille pour rédiger vos réponses, pas un crayon.
- (f) Vous pouvez utiliser la dernière page de cet examen comme papier brouillon. S'il vous manque du papier brouillon, demandez-en plus au surveillant.
- (g) Les téléphones, appareils électroniques ou notes de cours ne sont pas autorisés durant cet examen. **Les appareils électroniques doivent être éteints et rangés dans vos sacs.** Ne les gardez pas en votre possession, ni dans votre poche. Si vous êtes vu avec un tel appareil ou document, ceci pourrait se passer: vous devrez immédiatement quitter la salle d'examen et un rapport de fraude académique sera rédigé, ce qui pourra entraîner une cote de 0 (zéro) à l'examen.

En signant ci-dessous, vous assurez que vous respectez ces règles.

Signature _____

S'il vous plaît, n'écrivez rien dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Maximum	5	3	4	4	2	4	2	24
Points								

1. Considérons le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} y_1 - 2y_5 = 3y_2 + 3y_3 + 4 \\ y_1 - y_3 = 3y_2 + 4y_5 + 2 \\ 2y_1 + y_4 - 9 = 6y_2 + 6y_3 + y_5. \end{cases}$$

(a) [4 points] Écrivez la solution générale de ce système linéaire.

Solution: La matrice augmentée du système est $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 & -2 & | & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -4 & | & 2 \\ 2 & -6 & -6 & 1 & -1 & | & 9 \end{bmatrix}$

La F.E.R. de la matrice augmentée est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 & -2 & | & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -4 & | & 2 \\ 2 & -6 & -6 & 1 & -1 & | & 9 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \text{ F.E.} \\ &\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \text{ F.E.R.} \end{aligned}$$

Le système linéaire correspondant à cette dernière matrice augmentée est:

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 - 5y_5 = 1 \\ y_3 - y_5 = -1 \\ y_4 + 3y_5 = 1 \end{cases}$$

Grâce à la F.E.R. (ou la F.E.) on trouve que y_1, y_3, y_4 sont basiques, et y_2, y_5 sont libres. La solution générale du système est donc:

$$\begin{cases} y_1 = 3y_2 + 5y_5 + 1 \\ y_2 : \text{libre} \\ y_3 = y_5 - 1 \\ y_4 = -3y_5 + 1 \\ y_5 : \text{libre} \end{cases}$$

(b) [1 point] Donnez une solution explicite de ce système linéaire pour laquelle $y_2 = -1$ et $y_5 = 3$.

Solution: De la solution générale, on en déduit que

$$y_1 = 13, y_3 = 2, y_4 = -8.$$

La solution explicite est donc:

$$y_1 = 13, y_2 = -1, y_3 = 2, y_4 = -8, y_5 = 3.$$

2. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

(a) [2 points] Supposons que $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Écrivez la solution générale du système linéaire

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sous forme vectorielle paramétrique.

Solution:

La matrice augmentée du système est $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$ qui est déjà sous forme échelonnée réduite. Le système linéaire qui correspond à ce système linéaire est:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_5 = -3 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

De la matrice augmentée, on en déduit que x_1, x_2, x_4 sont basiques. La solution générale du système est donc

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_5 - 3 \\ x_2 = -3x_3 - x_5 + 1 \\ x_3 : \text{libre} \\ x_4 = x_5 - 1 \\ x_5 : \text{libre} \end{cases}$$

et sous forme vectorielle paramétrique:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 3x_5 - 3 \\ -3x_3 - x_5 + 1 \\ x_3 \\ x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [1 point] Existe-t-il un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ pour lequel le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est incompatible? Justifiez.

Solution: NON, car la matrice des coefficients du système est toujours A , et chaque ligne de A contient une position pivot.

3. [4 points] Déterminez toutes les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

est compatible. Pour chacune de ces valeurs de a , déterminez combien de solutions admet le système linéaire. Justifiez.

Solution: La matrice augmentée du système peut être réduite comme suit:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & a+3 & 6 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+9 & -3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Si $a + 9 \neq 0$, c'est à dire, si $a \neq -9$, alors la matrice ci-dessus sera sous F.E., les trois premières colonnes seront des colonnes pivots et la colonne de droite ne sera pas une colonne pivot. Ceci implique que le système sera compatible et que toutes les variables seront basiques. Le système aura donc une solution unique.

Si $a + 9 = 0$, c'est à dire, si $a = -9$, alors la matrice sera aussi sous F.E. mais cette fois la colonne de droite sera une colonne pivot (les colonnes pivots seront les 1ère, 2ème et 4ème). Le système sera donc incompatible.

4. [4 points] Pour chacun des énoncés suivants, indiquez s'il est vrai ou faux. Vous recevrez 1 point pour chaque réponse correcte, 0 point si vous ne répondez pas et -0,5 points pour chaque mauvaise réponse. Quoi qu'il arrive, votre score final pour cette question sera au minimum 0.

_____ Si la colonne de droite de la matrice des coefficients d'un système linéaire contient une position pivot, alors le système linéaire est incompatible.

Solution: Faux.

_____ Un système linéaire homogène avec 4 équations et 5 variables admet toujours une infinité de solutions.

Solution: Vrai.

_____ Étant donnés deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, et deux scalaires $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on a toujours $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \in \text{Vect}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Solution: Vrai.

_____ Deux matrices ligne-équivalentes qui sont toutes les deux sous forme échelonnée sont nécessairement égales.

Solution: Faux.

5. Effectuez les calculs suivants:

(a) [1 point] $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ où $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, et $c_3 = 3$.

Solution: $\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 11 \end{bmatrix}$

(b) [1 point] $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Solution: $\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. [4 points] Soient

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

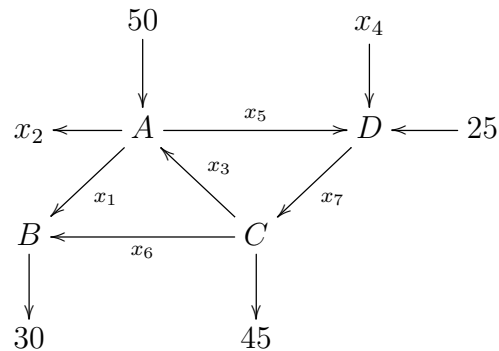
Est-ce que le vecteur $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartient à $\text{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? Justifiez.

Solution: On doit réduire la matrice suivante sous F.E.:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 + L_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_2 \end{array}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \text{ F.E.} \end{array}$$

Puisque la colonne de droite de cette matrice échelonnée est une colonne pivot, $\mathbf{b}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

7. [2 points] Considérons le réseau de trafic décrit par le diagramme suivant. Les lettres de A à D représentent des carrefours. Les flèches indiquent la direction du trafic (toutes les routes sont à sens unique) et leurs labels indiquent le débit en voiture par minute.



Écrivez un système linéaire qui décrit le flux de trafic, c'est à dire, toutes les contraintes sur les variables $x_i, i = 1, \dots, 7$. (Il ne faut pas résoudre le système linéaire.)

Solution:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A : & 50 + x_3 = x_1 + x_2 + x_5 \\ B : & x_1 + x_6 = 30 \\ C : & x_7 = x_3 + x_6 + 45 \\ D : & 25 + x_4 + x_5 = x_7 \\ \text{(total : } & 25 + 50 + x_4 = x_2 + 30 + 45) \end{array} \right.$$