1. Considérez un système d'équations linéaires avec 1741 équations et 2018 variables dont la matrice échelonnée de la matrice augmentée possède 1000 positions pivots (coefficients principaux). Lequel des énoncés suivants est vrai pour ce système ?

A. Le système est toujours inconsistant.

B. Le système a toujours une infinité de solutions.

C. Le système a entre 1 et 1741 solutions.

D. Le système peut être consistant ou inconsistant.

E. Le système a toujours une unique solution.

$r = 1000 < n = 2018$ veut dire une infinité de solutions si consistant.

mais le système peut quand même ne pas avoir de solutions.

D est donc le seul énoncé vrai.

2. Parmi les matrices suivantes il y a seulement **deux** sous forme échelonnée réduite. Déterminez lesquelles le sont.

I. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; II. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; III. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ IV. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; V. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A. I. et II.
B. I. et III.
C. II. et III.
D. II. et V.
E. III. et IV.
F. I. et V.

I oui

II non

III oui

IV : Non

V : non.

B est la réponse.

1. Considérez un système d'équations linéaires avec 1741 équations et 2018 variables dont la matrice échelonnée de la matrice augmentée possède 1000 positions pivots (coefficients principaux). Lequel des énoncés suivants est vrai pour ce système ?

A. Le système est toujours inconsistant.

B. Le système a toujours une infinité de solutions.

C. Le système a entre 1 et 1741 solutions.

D. Le système peut être consistant ou inconsistant.

E. Le système a toujours une unique solution.

$r = 1000 < n = 2018$ veut dire une infinité de solutions si consistant.

mais le système peut quand même ne pas avoir de solutions.

D est donc le seul énoncé vrai.

2. Parmi les matrices suivantes il y a seulement **deux** sous forme échelonnée réduite. Déterminez lesquelles le sont.

I. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; II. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; III. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ IV. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; V. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A. I. et II.

B. I. et III.

C. II. et III.

D. II. et V.

E. III. et IV.

F. I. et V.

I oui

II non

III oui

IV : Non

V : non.

B est la réponse.

3. Soient les paramètres p et q dans $\mathbb{R}$ et soit le système d'équations linéaires ï£¡ trois variables, x, y et z, suivant :

$$\begin{cases} x+2y-pz &= 1 \\ x-y-z &= q \\ 2x+7y-z &= 0 \end{cases}$$

a) Si $[A\,|\,b]$ est la matrice augmentée du système ci-dessus, trouvez $rg([A\,|\,b])$ pour <u>toutes</u> les valeurs de p et q.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -p & 1 \\ 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -p & 1 \\ 0 & -3 & p-1 & q-1 \\ 0 & 3 & 2p-1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -p & 1 \\ 0 & -3 & p-1 & q-1 \\ 0 & 0 & 3p-2 & q-3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}[A|b] = r = \begin{cases} 2, \text{ si } p = 2/3 \text{ et } q = 3, \\ 3, \text{ si } p = 2/3 \text{ et } q \neq 3, \\ 3, \text{ si } p \neq 2/3. \end{cases}$$

(Voir la page suivante pour la question (3b) ...)

3 (suite).

b) En utilisant votre réponse en a), trouvez toutes les valeurs de p et q telles que le système possède

(i) une solution unique,

donc $3p-2 \neq 0 \Rightarrow p \neq 2/3$.

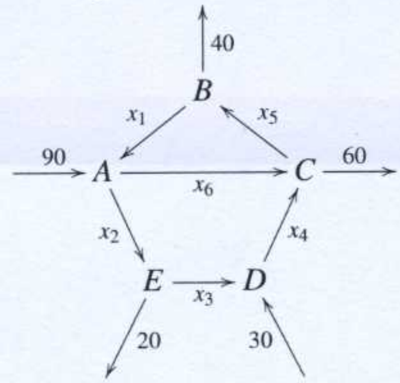
(ii) une infinité de solutions,

si $p = 2/3$ et $q = 3$

(iii) aucune solution.

si $p = 2/3$ et $q \neq 3$

4. Considérez le réseau routier avec intersections A, B, C, D et E ci-bas. Les flêches indiquent la direction du traffic qui se fait en une seule direction. Les chiffres et les variables x_i donnent le nombre de véhicules qui entrent ou sortent par les intersections A, B, C, D et E par minute.



a) Donnez le système linéaire qui représente ce réseau ainsi que les contraintes sur les variables.

A: $x_1+90=x_2$

B: $x_5=x_1+40$

C: $x_4+x_6=x_5+60$

D: $x_3+30=x_4$

E: $x_2=x_3+20$

Donc,
$$\begin{aligned} x_1-x_2&=-90\\ x_1-x_5&=-40\\ x_4-x_5+x_6&=60\\ x_3-x_4&=-30\\ x_2-x_3&=20 \end{aligned}$$

b) Si la matrice **échelonnée réduite** de la matrice augmentée du systéme dans la partie (a) est

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -40\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 50\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 30\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

écrivez la solution générale du systéme.

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5-40\\ x_5-x_6+50\\ x_5-x_6+30\\ x_5-x_6+60\\ x_5\\ x_6 \end{bmatrix} = x_5\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix} 0\\ -1\\ -1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40\\ 50\\ 30\\ 60\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Si, dû à des travaux, on ferme la route ED, trouvez le flux minimal le long de la route AC. Justifiez votre réponse.

ED fermé $\Rightarrow x_3=0 \Rightarrow x_5-x_6+30=0$

$\Rightarrow x_6=x_5+30$

Puisque $x_5\geq 0$

et $x_5-40=x_1\geq 0$

$\Rightarrow x_5\geq 40$

$\Rightarrow \boxed{x_6\geq 70}$

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) VRAI ou est (possiblement) FAUX, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) FAUX, vous devez **donner un contre-exemple explicite.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique, soit avec des matrices !
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) VRAI, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Un système linéaire avec m équations et n variables admet toujours une infinité de solutions si $m < n$.

Faux

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit le système $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; $m = 2, n = 3$, $2 < 3$ mais

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ a aucune solution.

RÉPONSE : Faux.

b) La matrice échelonnée réduite d'un système linéaire dont la matrice augmentée est de taille 1741×2018 peut avoir un un rang égale à 2018.

Faux.

$r \leq m$ = nb de équations

le rang est au plus 1741 et non 2018.

RÉPONSE : Faux.

(*Voir page suivante pour les questions c) et d) ...*)

Question 6. Résoudre au complet le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 4x_2 - 8x_3 &= 28 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\ -3x_1 - 10x_2 &= -6 \end{aligned}$$

Vous devez montrez votre travail et écrire vos solution(s) sous forme paramètrique.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 28 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ -3 & -10 & 0 & -6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & 28 \\ -3 & -10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 = L_3 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & 28 \\ 0 & 2 & -3 & 12 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 = \tfrac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$r = 3 = n$
solution unique

$$\underset{\sim}{L_1 = L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -22 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + 2L_3}{\overset{L_1 = L_1 - 7L_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Question 7. Résoudre au complet le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Vous devez montrer votre travail et écrire vos solution(s) sous forme paramètrique.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -8 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + L_1}{\overset{L_2 = L_2 + 2L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \underset{L_3 = -\frac{1}{3}L_3}{\overset{L_2 = \frac{1}{2}L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{r = 2 < 4 = n}{\overset{L_1 = L_1 + 2L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_1 = -L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

infinité de solutions

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 2 \\ \cancel{} \\ 2x_4 + 1 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$