

Université d'Ottawa
MAT 1732 B, Hiver 2018, Examen de mi session 1
le Mercredi 14 Février 2018

Professeur: Becem Saidani

Nom _____ Numéro d'étudiant(e) _____

- L'examen comporte 7 questions. Vous devez donner des réponses détaillées pour chaque question.
- La durée de cet examen est de 80 minutes.
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de l'examen immédiatement. a sera le cas aussi POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE. En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus. Signature : _____
- Seules les calculatrices approuvées par la faculté sont autorisées (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).
- L'examen est à livre fermé et aucun document n'est permis.

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

QUESTION 1. [4 points] Calculer la somme de Reimann à gauche pour l'intégrale $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ lorsque la partition de l'intervalle $[0, 1]$ comprend trois sous-intervalles égaux. Donner votre réponse avec une précision de deux chiffres après le point des décimales.

Solution: $1/3 * (f(0) + f(1/3) + f(2/3)) = 1/3(\ln(1) + \ln(4/3) + \ln(5/3))$

QUESTION 2. [3 points] Résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{\sqrt{x}}}{y\sqrt{x}}$$

avec la **condition initiale** $y(1) = 2\sqrt{e}$.

Parmi les réponses suivantes, encerclez la bonne.

A : $y = -\sqrt{8e^{\sqrt{x}} + 4e}$; B : $y = \sqrt{8e^{\sqrt{x}} + 4e}$; C : $y = -\sqrt{12e^{\sqrt{x}} - 8e}$; D : $y = \sqrt{12e^{\sqrt{x}} - 8e}$;
E : $y = \sqrt{12e^{\sqrt{x}}}$

Solution: This is a **Separable** Differential equation.

Separate: $ydy = \frac{3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **Integrate:** $\int ydy = \int \frac{3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Compute as follows: (using the power rule and a SUB: $u = \sqrt{x}$, so $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$)
 $\frac{y^2}{2} = 3 \int e^u 2du = 6 \int e^u du = 6e^u + c = 6e^{\sqrt{x}} + c$, where c is a number.

The initial condition says: $2\sqrt{e} = y(1)$, so $4e = y(1)^2$, hence $2e = \frac{(y(1))^2}{2} = 6e^1 + c$, thus $c = 2e - 6e = -4e$.

From $\frac{y^2}{2} = 6e^{\sqrt{x}} - 4e$, one has $y = \pm\sqrt{12e^{\sqrt{x}} - 8e}$. Since the Initial Condition is Positive, it follows that the solution is ONLY: $y = \sqrt{12e^{\sqrt{x}} - 8e}$.

QUESTION 3. [5 points] Pour l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 27x - 14}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

Encercler le ou les terme(s) qui **n'apparaient pas** dans votre réponse final ?

A : $+c$; B : x^2 ; C : $-2 \ln |x - 4|$; D : $5 \ln |x - 3|$; E : $2 \ln |x + 4|$;

SOLUTION: By LONG DIVISION one has that $\frac{2x^3-14x^2+27x-14}{x^2-7x+12} = 2x + \frac{3x-14}{x^2-7x+12}$, which can be written as:

$2x + \frac{3x-14}{x^2-7x+12}$. For the second term we use Partial Fractions:

$$\frac{3x-14}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}, \text{ hence } 3x - 14 = A(x - 3) + B(x - 4) = x(A + B) - 4A - 3B.$$

Hence $A + B = 3$, and $-4A - 3B = -14$,

Thus $A = 3 - B$ and $-4(3 - B) - 3B = -14$.

We get $B = -2$ and $A = 5$.

Our integral becomes: $x^2 + 5 \ln |x - 3| - 2 \ln |x - 4| + c$, c a number.

QUESTION 4. (4 points) Étudiez la convergence de l'intégrale impropre suivante. Si elle converge, déterminez sa valeur.

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{4+8x^2} dx$$

SOLUTION: By the very definition of an improper integral one has:

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{3}{4+8x^2} dx =$$

$$\frac{3}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{1+2x^2} dx =$$

$$\frac{3}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} dx.$$

Now use a SUB: $u = \sqrt{2}x$, and notice that $\frac{du}{dx} = \sqrt{2}$, hence $\frac{du}{\sqrt{2}} = dx$.

Our integral becomes:

$$I = \frac{3}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{2\sqrt{2}}^{t\sqrt{2}} \frac{1}{1+(u)^2} \frac{du}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(u) \Big|_{2\sqrt{2}}^{t\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} \{\arctan(t\sqrt{2}) - \arctan(2\sqrt{2})\} =$$

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan(2\sqrt{2}) \right\}, \text{ thus it is convergent.}$$

QUESTION 5. (5 points) Trouver l'aire de la région bornée par les courbes de $f(x) = x^{-1}$ et $g(x) = x^{-2}$, et les droites $x = 1/2$ et $x = 2$.

- Pour pouvoir calculer l'aire entre deux courbes nous devons premièrement déterminer tous les points d'intersection de ces courbes qui tombent dans l'intervalle $[1/2, 2]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^{-1} &= x^{-2} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} \\ x &= 1 \text{ puisque } x \neq 0 \text{ par contrainte du domaine.} \end{aligned}$$

- Ensuite, nous divisons l'intervalle donné par les points d'intersections que nous avons trouvés. Donc,

$$[1/2, 2] = [1/2, 1] \cup [1, 2].$$

- Sur chacun des sous-intervalles, nous déterminons laquelle des deux fonctions est supérieure. Nous pouvons déterminer ceci soit graphiquement ou algébriquement :

Algébriquement :

x	$[1/2, 1[$	$]1, 2]$
$f(x)$	$f(3/4) = 4/3 \approx 1,33$	$f(3/2) = \frac{2}{3} \approx 0.66$
$g(x)$	$g(3/4) = \frac{16}{9} \approx 1.77$	$g(3/2) = \frac{4}{9} \approx 0.44$

Dans chacun des cas, nous déterminons que

$$g(x) \geq f(x) \quad \text{sur } [1/2, 1]$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{sur } [1, 2]$$

- Maintenant nous pouvons construire l'intégrale qui calcul l'aire voulu :

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/2}^1 g(x) - f(x) dx + \int_1^2 f(x) - g(x) dx \\ &= \int_{1/2}^1 x^{-2} - x^{-1} dx + \int_1^2 x^{-1} - x^{-2} dx \\ &= [-x^{-1} - \ln |x|]_{1/2}^1 + [\ln |x| - x^{-1}]_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

QUESTION 6. (6 points) L'équation différentielle suivante décrit le nombre de zombies $z(t)$ sur une île au temps t .

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = k(z-1)(z+1)\ln\left(\frac{400}{z}\right)$$

avec k une constante positive.

- (a) Déterminer les points d'équilibres (qui ont un sens biologique)
- (b) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre dans (a) en utilisant le test de la première dérivée.
- (c) Donnez le portrait de phase de cette équation différentielle.
- (d) Si on suppose que initialement on a 395 zombies, déterminer le nombre de zombies à long terme.

Solution: (a) We solve for z in $f(z) = 0$ as follows: $k(z-1)(z+1)\ln\left(\frac{400}{z}\right) = 0$, thus either $z-1 = 0$, $z+1 = 0$, or $\ln\left(\frac{400}{z}\right) = 0$; hence $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ and $z_3 = 400$. The equilibrium points that are bio meaningful are: $z_1 = 1$ and $z_3 = 400$ since they are positive.

(b) We compute the derivative by product rule (since $f(z) = k((z^2-1))(\ln(400) - \ln(z))$):

$$f'(z) = k\left\{(2z)(\ln(400) - \ln(z)) + (z^2 - 1)\left(-\frac{1}{z}\right)\right\}$$

Note that: $f'(1) = 2k \ln(400) > 0$, so $z_1 = 1$ is UNSTABLE. (Recall that $k > 0$.)

Note that: $f'(400) = k(400^2 - 1)\frac{-1}{400} < 0$, so $z_3 = 400$ is STABLE.

(c) Here is the phase line diagram:

(d) Since 395 is in between two equilibrium points (z_1 being unstable and z_3 being stable) and close to z_3 , a solution starting at 395 converges to the stable equilibrium (which is 400).

QUESTION 7. (5 points) Déterminer la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = 4 \ln(2x)$$

sur l'intervalle $[1; 3]$.

SOLUTION: By its formula, the average value is $A = \frac{1}{3-1} \int_1^3 4 \ln(2x) dx = \frac{1}{2} \times 4 \int_1^3 1 \times \ln(2x) dx = 2 \int_1^3 1 \times \ln(2x) dx$.

Use Integration by Parts: $u'(x) = 1$, and $v(x) = \ln(2x)$ imply that $u(x) = x$ and $v'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{Thus } A &= 2(\{x \ln(2x)\big|_1^3 - \int_1^3 x \frac{1}{x} dx\}) = \\ &2(\{3 \ln(6) - \ln(2) - \int_1^3 1 dx\}) = \\ &2(\{3 \ln(6) - \ln(2) - x\big|_1^3\}) = \\ &2(\frac{1}{2}\{3 \ln(6) - \ln(2) - 3 + 1\}) = \\ &2(\{3 \ln(6) - \ln(2) - 2\}). \end{aligned}$$