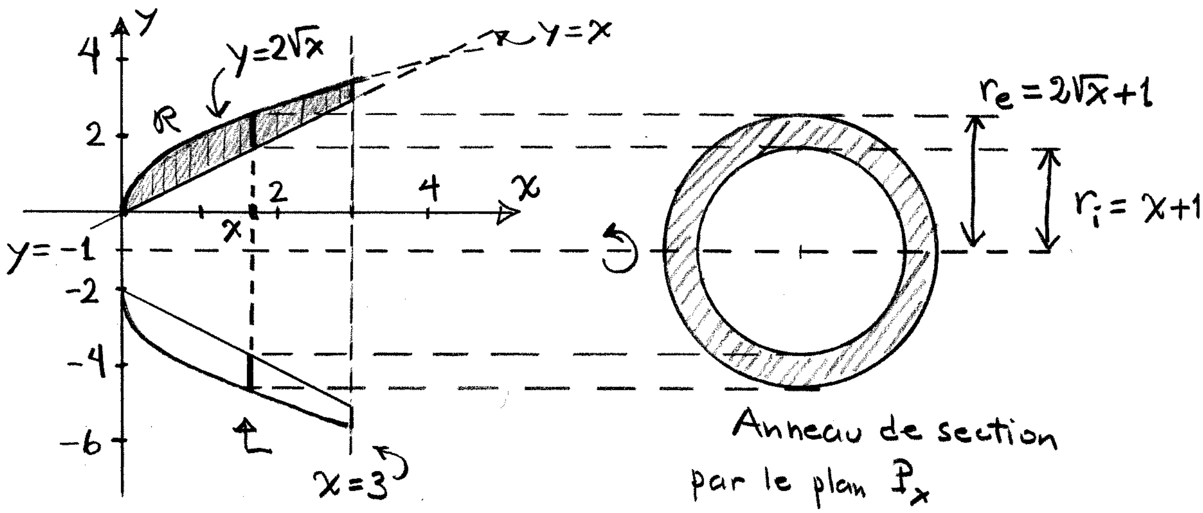
MAT 1722 Solutions du DGD 1

1. On veut calculer le volume du solide de révolution $\mathcal{S}$ obtenu par rotation autour de la droite $y = -1$ de la région $\mathcal{R}$ du plan délimitée par les courbes

$$y = x, \quad y = 2\sqrt{x} \quad \text{et} \quad x = 3.$$

(i) Dessinez cette région $\mathcal{R}$, la trace de $\mathcal{S}$ dans le plan xy, et l'anneau de section du solide $\mathcal{S}$ par le plan des points d'abscisse x générale, avec ses dimensions. Utilisez la présentation apprise en classe et n'oubliez pas les échelles sur les axes de coordonnées.



(ii) Quels sont le rayon intérieur r_i, le rayon extérieur r_e et l'aire $A(x)$ de cet anneau?

Réponses: $r_i \ = \ x + 1$ $\qquad\qquad r_e \ = \ 2\sqrt{x} + 1$

$$A(x) \ = \ \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi((2\sqrt{x} + 1)^2 - (x + 1)^2) = \pi(2x + 4\sqrt{x} - x^2)$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_0^3 A(x)\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 (2x + 4\sqrt{x} - x^2)\, \mathrm{d}x = \pi \left[x^2 + \frac{8}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right|_0^3 = 8\sqrt{3}\pi \cong 43.53$$

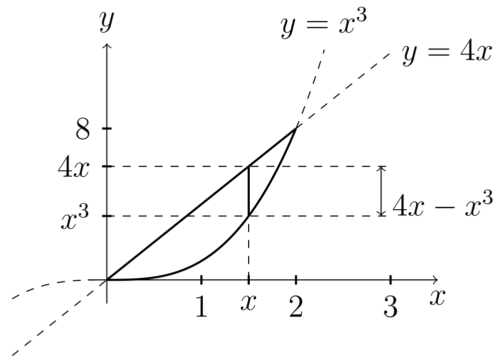
2. Soit $\mathcal{R}$ la région bornée du premier quadrant délimitée par les courbes

$$y = 4x \quad \text{et} \quad y = x^3 .$$

(i) Dessinez cette région et calculez son aire.

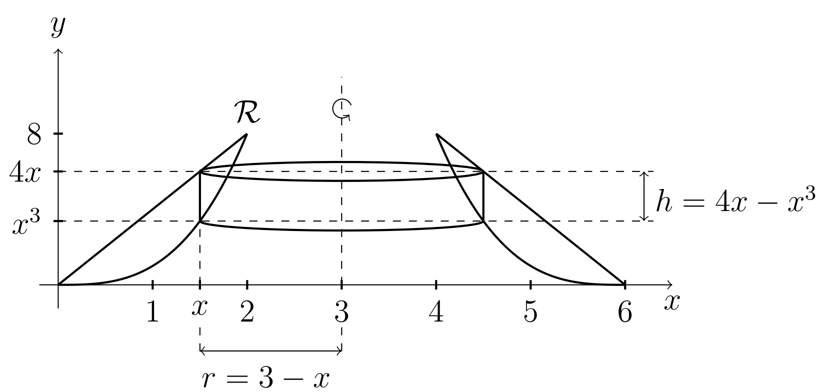
Solution. On détermine d'abord les points d'intersection des deux courbes en résolvant $4x = x^3$. On trouve $x = 0$ ou $4 = x^2$ donc $x = -2$, 0 ou 2. Comme on recherche des points du premier quadrant, on est réduit à $x = 0, 2$. Donc les points cherchés sont $(0, 0)$ et $(2, 8)$.
L'aire de cette région est

$$\int_0^2 (4x - x^3)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \boxed{4}.$$



(ii) Soit $\mathcal{S}$ le solide de révolution obtenu par rotation de cette région autour de la droite verticale $x = 3$. Dessinez la trace de $\mathcal{S}$ dans le plan xy, et le cylindre mince obtenu par rotation de la portion verticale de $\mathcal{R}$ comprise entre les abscisses x et $x + \Delta x$ pour x général et Δx petit, avec ses dimensions. Quels sont, en première approximation, le rayon r, la hauteur h et le volume ΔV de ce cylindre?

Solution. $r = 3 - x$, $\quad h = 4x - x^3 \quad$ et $\quad \Delta V \cong 2\pi r h \Delta x = 2\pi(3 - x)(4x - x^3)\Delta x$.

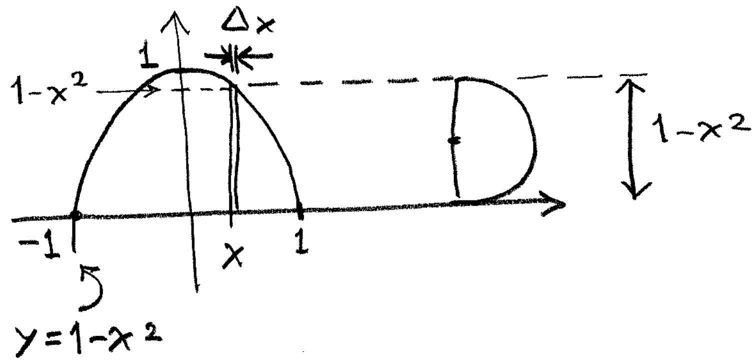


(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{S}) &= \int_0^2 2\pi(3 - x)(4x - x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (12x - 4x^2 - 3x^3 + x^4)dx \\
&= 2\pi \left[6x^2 - (4/3)x^3 - (3/4)x^4 + (1/5)x^5 \right|_0^2 = \frac{232\pi}{15} \cong 48.59.
\end{aligned}$$

3. Calculez le volume du solide à fond plat dont la base dans le plan xy est la région délimitée par l'axe des x et la parabole $y = 1 - x^2$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

<u>Solution</u> La parabole $y = 1 - x^2$ coupe l'axe Ox aux points où $1 - x^2 = 0$ c'est-à-dire $x = \pm 1$.



La section par le plan P_x du point d'abscisse x est un demi-cercle de <u>diamètre</u> $1-x^2$. Sa surface est

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(1-x^2)^2$$

$$= \frac{\pi}{8}(1-2x^2+x^4) \quad \leftarrow \text{fonction paire}$$

$$\text{Volume} = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = 2\int_0^1 A(x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = \frac{\pi}{4}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{15}}$$

4. Calculez chacune des intégrales suivantes:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x$.

(i) Comme $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, on peut écrire

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ (décomposition en fractions partielles). Pour déterminer A et B, on simplifie le membre de droite

$$\mathrm{d}x\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2},$$

puis on compare les numérateurs des deux côtés:

$$1=(A+B)x+(2A+B) \iff \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \iff A=1 \text{ et } B=-1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big|_0^1 = \ln(3/4).\end{aligned}$$

(ii) Comme t^2+4 n'a pas de racine réelles, on ne peut pas effectuer de décomposition en fractions partielles. Par contre, on note que

$$\int \frac{t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t=\int \frac{t}{t^2+4}\,\mathrm{d}t+\int \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t.$$

La première des deux intégrales se résout facilement par substitution. En posant $u=t^2+4$, on trouve $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$, donc

$$\int \frac{t}{t^2+4}\,\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}u/2}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+C.$$

Pour la seconde, il suffit de se ramener à la forme $\int \mathrm{d}u/(u^2+1)$. Pour cela, on pose $u=t/2$, alors $\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}u$ et on trouve

$$\int \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t/2)^2+1}=\frac{1}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{1}{2}\arctan(u)+C=\frac{1}{2}\arctan(t/2)+C.$$

En conclusion,

$$\int \frac{t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\arctan(t/2) + C.$$

(iii) On procède par parties. En posant $u = x$ et $\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x$, on trouve $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et $v = -e^{-x}$, donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x &= x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + C \\
&= -\frac{x+1}{e^x} + C.
\end{aligned}$$