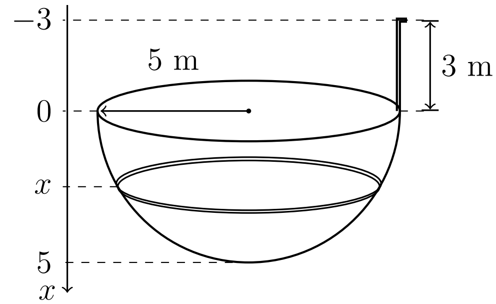
Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 5 m de rayon, ouvert vers le haut comme le montre la figure ci-contre.

Il est rempli d'eau et on veut pomper toute cette eau à 3 m au-dessus du réservoir.

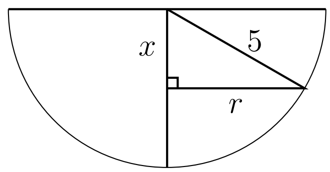
On note x la profondeur en mètres mesurée **à partir du dessus du réservoir** (voir le dessin).



(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les profondeurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x$ où $r =$ rayon à la profondeur x

Coupe du réservoir:



le théorème de Pythagore donne: $r = \sqrt{5^2 - x^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V \cong \pi(25 - x^2)\Delta x}$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 3 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m^3, et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned}\Delta W &\cong (\text{poids de la couche}) \times (\text{hauteur à pomper}) \\ &= (9.8 \times 1000 \times \Delta V) \times (x+3) \\ &= 9800\Big(\pi(25 - x^2)\Delta x\Big)(x+3) = \boxed{9800\pi(25 - x^2)(x+3)\Delta x}.\end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau à 3 m au-dessus du réservoir? **Écrire seulement l'intégrale.** Ce n'est pas nécessaire de la calculer.

Réponse: $W = \displaystyle\int_0^5 9800\pi(25 - x^2)(x+3)\,\mathrm{d}x$

Un câble qui pèse 10 N/m sert à remonter 80 N de minerai du fond d'un puits 100 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, x mètres de câble aient été remontés à la surface. Quel est, en première approximation, le travail requis pour en remonter Δx mètres de plus?

Solution. S'il y a x mètres de câble à la surface, c'est qu'il en pend $100 - x$ mètres. Le poids de ces $100 - x$ mètres de câble est $10(100 - x)$ N. Ajouté au poids du minerai, le poids total est $80 + 10(100 - x) = 1080 - 10x$ N.

Pour en remonter Δx mètres de plus, le travail requis est environ

$$\boxed{\Delta W \cong (1080 - 10x)\Delta x}$$

car, pour Δx petit, le poids de l'ensemble ne varie presque pas lorsqu'on remonte le câble de Δx mètre.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface?

Solution. Lorsqu'on remonte la totalité du câble, la longueur x à la surface passe de 0 m à 100 m. Donc le travail est

$$W = \int_0^{100} (1080 - 10x)\,\mathrm{d}x = 58000 \text{ J}$$

La longueur naturelle d'un ressort est de 10 cm et il faut exercer une force de 12 N pour l'allonger à 25 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force $F(x)$ requise pour étirer le ressort de x mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!

Solution. La loi de Hooke donne $F(x) = kx$ pour une constante k. Lorsqu'on allonge le ressort de 10 cm à 25 cm, il subit un étirement de

$$\frac{25-10}{100} = 0.15 \text{ m}.$$

Par hypothèse, on a $12 = k \times 0.15$, par suite $k = 80$ et $\boxed{F(x) = 80x}$.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 10 cm à 25 cm. Attention aux unités!

Solution. L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de 0 m à 0.15 m. Le travail requis est donc

$$\int_0^{0.15} 80x\,\mathrm{d}x = 80\left[\frac{x^2}{2}\right|_0^{0.15} = \boxed{0.9 \text{ J}}.$$

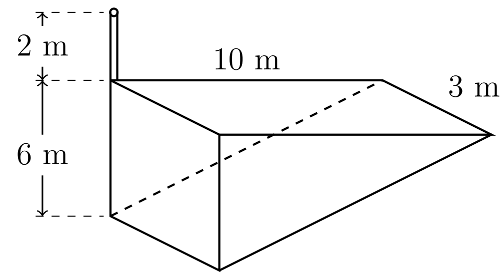
(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 25 cm à 35 cm. Attention aux unités!

Solution. Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de 0.15 m à 0.25 m. Le travail requis est donc

$$\int_{0.15}^{0.25} 80x\,\mathrm{d}x = 80\left[\frac{x^2}{2}\right|_{0.15}^{0.25} = \boxed{1.6 \text{ J}}.$$

Le dessin ci-contre montre un réservoir en forme de piscine avec le dessus à l'horizontale, une face verticale et un plancher oblique. Ses dimensions sont données en mètres, et ce réservoir est plein d'eau

On veut pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir.

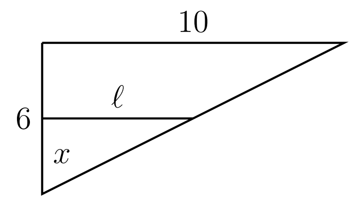


On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur ℓ et de largeur 3 où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre). On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{10}{6} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{5}{3}x.$$



$$\Longrightarrow \quad \Delta V \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 3\ell\Delta x = 5x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8$ m/s^2.

Solution. On doit monter la couche de $8 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800\,(5x\Delta x)\,(8-x) = 49000x(8-x)\Delta x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 2 m au-dessus du réservoir?

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 6$:

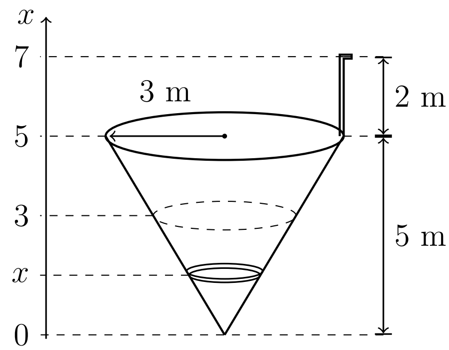
$$W = \int_0^6 49000x(8-x)\,\mathrm{d}x = 49000\int_0^6 (8x - x^2)\,\mathrm{d}x \cong 3.53 \times 10^6 \text{ Joules J.}$$

Un réservoir a la forme d'un cône droit avec la pointe en bas comme le montre la figure ci-contre.

Sa hauteur est de 5 m et son rayon à la base (c'est-à-dire le dessus du réservoir) est de 3 m. Il est rempli d'eau jusqu'à 3 m.

On veut pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir.

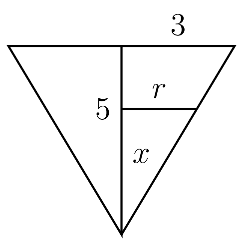
On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.



(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x$ où $r =$ rayon à la hauteur x

Coupe du réservoir:



la loi des triangles semblables donne: $\dfrac{r}{x} = \dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r = \dfrac{3x}{5}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V \cong \dfrac{9\pi}{25} x^2 \Delta x}$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m^3, et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned}\Delta W &\cong (\text{poids de la couche}) \times (\text{hauteur à pomper})\\ &= (9.8 \times 1000 \times \Delta V) \times (7 - x)\\ &= 9800\Big(\frac{9\pi}{25}x^2\Delta x\Big)(7 - x) = \boxed{3528\pi x^2(7 - x)\Delta x}.\end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper les 3 m d'eau du réservoir à 2 m au-dessus du réservoir?

Réponse:
$$\begin{aligned}W &= \int_0^3 \Big(3528\pi x^2(7 - x)\Big)\,\mathrm{d}x = 3528\pi \int_0^3 (7x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x\\ &= 3528\pi \left[\frac{7}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right|_0^3 \cong \boxed{4.74 \times 10^5 \text{ Joules}}.\end{aligned}$$

La longueur naturelle d'un ressort est de 20 cm et il faut exercer une force de 20 N pour l'allonger à 25 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force $F(x)$ requise pour étirer le ressort de x mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!

Solution. La loi de Hooke donne $F(x) = kx$ pour une constante k. Lorsqu'on allonge le ressort de 20 cm à 25 cm, il subit un étirement de

$$\frac{25-20}{100} = 0.05 \text{ m}.$$

Par hypothèse, on a $20 = k \times 0.05$, par suite $k = 400$ et $\boxed{F(x) = 400x}$.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 20 cm à 25 cm. Attention aux unités!

Solution. L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de 0 m à 0.05 m. Le travail requis est donc

$$\int_0^{0.05} 400x \,\mathrm{d}x = 400 \left[\frac{x^2}{2}\right|_0^{0.05} = \boxed{0.5 \text{ J}}.$$

(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 25 cm à 35 cm. Attention aux unités!

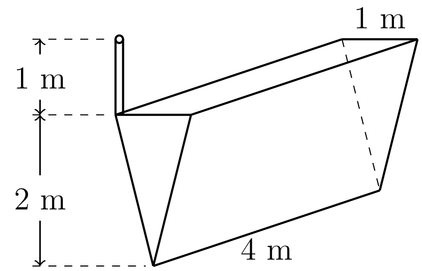
Solution. Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de 0.05 m à 0.15 m. Le travail requis est donc

$$\int_{0.05}^{0.15} 400x \,\mathrm{d}x = 400 \left[\frac{x^2}{2}\right|_{0.05}^{0.15} = \boxed{4 \text{ J}}.$$

Un réservoir a la forme d'un prisme droit à base triangulaire comme le montre la figure ci-contre.

Ses faces verticales sont des triangles isocèles de hauteur 2 m et de base 1 m, sa longueur est de 4 m, et il est plein d'eau.

On veut pomper toute son eau à 1 m au-dessus du réservoir.

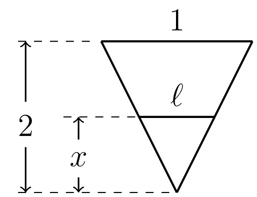


On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$.

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur 4 et de largeur ℓ où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre). On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{x}{2}.$$



$$\Longrightarrow \quad \Delta V \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 4\ell\Delta x = 2x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 1 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8$ m/s^2.

Solution. On doit monter la couche de $3 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned}\Delta W &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800(2x\Delta x)(3-x) = 19600x(3-x)\Delta x\end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 1 m au-dessus du réservoir.

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 2$:

$$W = \int_0^2 19600x(3-x)dx = 19600\int_0^2 (3x - x^2)dx = 19600\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^2 \cong 65300 \text{ J}.$$

Un câble qui pèse 5 N/m sert à remonter 60 N de minerai du fond d'un puits 80 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, x mètres de câble aient été remontés à la surface. Quel est, en première approximation, le travail requis pour en remonter Δx mètres de plus?

Solution. S'il y a x mètres de câble à la surface, c'est qu'il en pend $80 - x$ mètres. Le poids de ces $80 - x$ mètres de câble est $5(80 - x)$ N. Ajouté au poids du minerai, le poids total est $60 + 5(80 - x) = 460 - 5x$ N.

Pour en remonter Δx mètres de plus, le travail requis est environ

$$\boxed{\Delta W \cong (460 - 5x)\Delta x}$$

car, pour Δx petit, le poids de l'ensemble ne varie presque pas lorsqu'on remonte le câble de Δx mètre.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface?

Solution. Lorsqu'on remonte la totalité du câble, la longueur x à la surface passe de 0 m à 80 m. Donc le travail est

$$W = \int_0^{80} (460 - 5x)\,\mathrm{d}x = 20800 \text{ J}$$