

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{n^2+2}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{2^n(x-2)^n}{n^2+2}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{2^{n+1}|x-2|^{n+1}}{(n+1)^2+2} \cdot \frac{n^2+2}{2^n|x-2|^n} \\ &= 2|x-2| \frac{n^2+2}{(n+1)^2+2} = 2|x-2| \frac{1+2/n^2}{(1+1/n)^2+2/n^2} \rightarrow 2|x-2| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$2|x-2| < 1 \iff -1/2 < x-2 < 1/2 \iff \boxed{3/2 < x < 5/2},$$

et elle diverge **si**

$$2|x-2| > 1 \iff x-2 < -1/2 \text{ ou } x-2 > 1/2 \iff \boxed{x < 3/2 \text{ ou } x > 5/2}.$$

Le centre de la série est  $x = 2$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1/2}$ .

- Si  $x = 3/2$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1/2)^n}{n^2+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ .

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

(série de Riemann avec  $p = 2 > 1$ ), cette série est absolument convergente, donc convergente.

- Si  $x = 5/2$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(1/2)^n}{n^2+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ .

C'est une série à termes positifs convergente en vertu des mêmes calculs.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[3/2, 5/2]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{4^n n^3}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{4^n n^3}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-3|^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)^3} \cdot \frac{4^n n^3}{|x-3|^{2n}} \\ &= \frac{|x-3|^2}{4} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{|x-3|^2}{4} \frac{1}{(1+n^{-1})^3} \rightarrow \frac{|x-3|^2}{4} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x-3|^2}{4} < 1 \iff -2 < x-3 < 2 \iff \boxed{1 < x < 5},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x-3|^2}{4} > 1 \iff x-3 < -2 \text{ ou } x-3 > 2 \iff \boxed{x < 1 \text{ ou } x > 5}.$$

Le centre de la série est  $x = 3$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 2}$ .

- Si  $x = 1$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^{2n}}{4^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/n^3$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $n^3 \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 5$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ .

C'est la même série. Alors, elle est convergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[1, 5]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 1}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 1}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} \cdot \frac{n^2 + 1}{n|x|^n} \\ &= |x| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = |x| (1 + (1/n)) \frac{1 + 1/n^2}{(1 + 1/n)^2 + 1/n^2} \rightarrow |x| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|x| < 1 \iff \boxed{-1 < x < 1},$$

et elle diverge **si**

$$|x| > 1 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 1}.$$

Le centre de la série est  $x = 0$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n}{n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ .

C'est une série à termes positifs. On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Donc elle est divergente.

- Si  $x = 1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = f(n)$  où  $f(x) = x/(x^2 + 1)$ .

On a

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \text{ pour } x > 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + (1/x)} = 0.$$

Donc la suite  $b_n$  est décroissante pour  $n \geq 1$  et tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors, la série est convergente en vertu du test des séries alternées.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $(-1, 1]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{n^2+1}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{3^n(x-1)^n}{n^2+1}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{3^{n+1}|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{3^n|x-1|^n} \\ &= 3|x-1| \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 3|x-1| \frac{1+1/n^2}{(1+1/n)^2+1/n^2} \rightarrow 3|x-1| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$3|x-1| < 1 \iff -1/3 < x-1 < 1/3 \iff \boxed{2/3 < x < 4/3},$$

et elle diverge **si**

$$3|x-1| > 1 \iff x-1 < -1/3 \text{ ou } x-1 > 1/3 \iff \boxed{x < 2/3 \text{ ou } x > 4/3}.$$

Le centre de la série est  $x = 1$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1/3}$ .

- Si  $x = 2/3$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(-1/3)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ .

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

(série de Riemann avec  $p = 2 > 1$ ), cette série est absolument convergente, donc convergente.

- Si  $x = 4/3$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(1/3)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ .

C'est une série à termes positifs convergente en vertu des mêmes calculs.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[2/3, 4/3]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n n^2}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n n^2}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-2|^{2n+2}}{9^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{9^n n^2}{|x-2|^{2n}} \\ &= \frac{|x-2|^2}{9} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x-2|^2}{9} \frac{1}{(1+n^{-1})^2} \rightarrow \frac{|x-2|^2}{9} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x-2|^2}{9} < 1 \iff -3 < x-2 < 3 \iff \boxed{-1 < x < 5},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x-2|^2}{9} > 1 \iff x-2 < -3 \text{ ou } x-2 > 3 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 5}.$$

Le centre de la série est  $x = 2$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 3}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^{2n}}{9^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/n^2$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $n^2 \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 5$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{9^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

C'est la même série. Alors, elle est convergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[-1, 5]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|2x-1|^{n+1}}{5^{n+1} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{5^n \sqrt{n}}{2^n |2x-1|^n} \\ &= \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{1}{1+(1/n)}} \rightarrow \frac{|2x-1|}{5} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|2x-1|/5 < 1 \iff |2x-1| < 5 \iff -5 < 2x-1 < 5 \iff \boxed{-2 < x < 3},$$

et elle diverge **si**

$$\begin{aligned} |2x-1|/5 > 1 \iff |2x-1| > 5 \iff 2x-1 < -5 \text{ ou } 2x-1 > 5 \\ \iff \boxed{x < -2 \text{ ou } x > 3}. \end{aligned}$$

Le centre de la série est  $x = 1/2$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 5/2}$ .

- Si  $x = -2$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/\sqrt{n}$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $\sqrt{n} \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 3$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ .

Elle est divergente (série de Riemann avec  $p = 1/2 \leq 1$ ).

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[-2, 3)$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n n^2}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n n^2}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-2|^{2n+2}}{9^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{9^n n^2}{|x-2|^{2n}} \\ &= \frac{|x-2|^2}{9} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x-2|^2}{9} \frac{1}{(1+n^{-1})^2} \rightarrow \frac{|x-2|^2}{9} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x-2|^2}{9} < 1 \iff -3 < x-2 < 3 \iff \boxed{-1 < x < 5},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x-2|^2}{9} > 1 \iff x-2 < -3 \text{ ou } x-2 > 3 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 5}.$$

Le centre de la série est  $x = 2$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 3}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^{2n}}{9^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/n^2$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $n^2 \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 5$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{9^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

C'est la même série. Alors, elle est convergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[-1, 5]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-1|^{2n+2}}{4^{n+1} \sqrt{n+2}} \cdot \frac{4^n \sqrt{n+1}}{|x-1|^{2n}} \\ &= \frac{|x-1|^2}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x-1|^2}{4} \sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}} \rightarrow \frac{|x-1|^2}{4} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x-1|^2}{4} < 1 \iff -2 < x-1 < 2 \iff \boxed{-1 < x < 3},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x-1|^2}{4} > 1 \iff x-1 < -2 \text{ ou } x-1 > 2 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 3}.$$

Le centre de la série est  $x = 1$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 2}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$  (série de Riemann avec  $p = 1/2 < 1$ ).  
Alors la série est divergente.

- Si  $x = 3$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty$  par le même calcul.  
Alors la série est encore divergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $(-1, 3)$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n+1}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{n(x-1)^n}{n+1}$ . On trouve

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)|x-1|^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n|x-1|^n} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} |x-1| = \frac{(1+1/n)^2}{1+(2/n)} |x-1| \rightarrow |x-1| \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff \boxed{0 < x < 2},$$

et elle diverge **si**

$$|x-1| > 1 \iff x-1 < -1 \text{ ou } x-1 > 1 \iff \boxed{x < 0 \text{ ou } x > 2}.$$

Le centre de la série est  $x = 1$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1}$ .

- Si  $x = 0$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n+1}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = n/(n+1)$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \neq 0$ , cette série est divergente.

- Si  $x = 2$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1) = 1 \neq 0$ , cette série est divergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $(0, 2)$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{4^n n^3}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{4^n n^3}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-3|^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)^3} \cdot \frac{4^n n^3}{|x-3|^{2n}} \\ &= \frac{|x-3|^2}{4} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{|x-3|^2}{4} \frac{1}{(1+n^{-1})^3} \rightarrow \frac{|x-3|^2}{4} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x-3|^2}{4} < 1 \iff -2 < x-3 < 2 \iff \boxed{1 < x < 5},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x-3|^2}{4} > 1 \iff x-3 < -2 \text{ ou } x-3 > 2 \iff \boxed{x < 1 \text{ ou } x > 5}.$$

Le centre de la série est  $x = 3$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 2}$ .

- Si  $x = 1$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^{2n}}{4^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/n^3$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $n^3 \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 5$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ .

C'est la même série. Alors, elle est convergente.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[1, 5]$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|2x-1|^{n+1}}{5^{n+1} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{5^n \sqrt{n}}{2^n |2x-1|^n} \\ &= \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{1}{1+(1/n)}} \rightarrow \frac{|2x-1|}{5} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|2x-1|/5 < 1 \iff |2x-1| < 5 \iff -5 < 2x-1 < 5 \iff \boxed{-2 < x < 3},$$

et elle diverge **si**

$$\begin{aligned} |2x-1|/5 > 1 \iff |2x-1| > 5 \iff 2x-1 < -5 \text{ ou } 2x-1 > 5 \\ \iff \boxed{x < -2 \text{ ou } x > 3}. \end{aligned}$$

Le centre de la série est  $x = 1/2$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 5/2}$ .

- Si  $x = -2$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/\sqrt{n}$ . Comme  $b_n \downarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $\sqrt{n} \uparrow \infty$ ), cette série est convergente.

- Si  $x = 3$ , la série devient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ .

Elle est divergente (série de Riemann avec  $p = 1/2 \leq 1$ ).

L'intervalle de convergence de la série est donc  $[-2, 3)$ .

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 4}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 4}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{(n+1)^2 + 4} \cdot \frac{n^2 + 4}{n|x|^n} \\ &= |x| \frac{n+4}{n} \cdot \frac{n^2 + 4}{(n+1)^2 + 4} = |x| (1 + (4/n)) \frac{1 + 4/n^2}{(1 + 1/n)^2 + 4/n^2} \rightarrow |x| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|x| < 1 \iff \boxed{-1 < x < 1},$$

et elle diverge **si**

$$|x| > 1 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 1}.$$

Le centre de la série est  $x = 0$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n}{n^2 + 4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$ .

C'est une série à termes positifs. On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Donc elle est divergente.

- Si  $x = 1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = f(n)$  où  $f(x) = x/(x^2 + 4)$ .

On a

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} < 0 \text{ pour } x > 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + (4/x)} = 0.$$

Donc la suite  $b_n$  est décroissante pour  $n \geq 2$  et tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors, la série est convergente en vertu du test des séries alternées.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $(-1, 1]$ .