Université d'Ottawa

MAT 1732 B, Hiver 2018, Examen de mi session 2

le Mercredi 28 Février 2018

Professeur: Becem Saidani

Nom ____________________________ Numéro d'étudiant(e) _______________________

- L'examen comporte 7 questions. Vous devez donner des réponses détaillées pour chaque question.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangś dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de lexamen immédiatement. a sera le cas aussi POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE. En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus. Signature :_______________________
- Seules les calculatrices approuvées par la faculté sont autorisées (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).
- L'examen est à livre fermé et aucun document n'est permis.

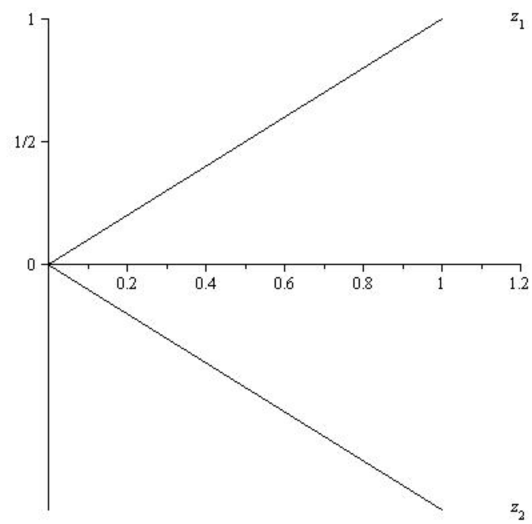
Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

QUESTION 1. [6 points] Considérez l'équation suivante

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

(a) Donnez sous la forme $a + ib$ puis repésentez sur le plan xOy les racines complexes de cette équation.

Solution:
Racines: $z_{1,2} = 1 \pm i$.



(b) Écrivez $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$ sous leur **forme polaire** $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Solution:
We have $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Also $\arg(z_1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ and since $z_2 = \overline{z_1}$ then $\arg(z_2) = \frac{7\pi}{4}$. Hence, in polar form $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ and $z_2 = \sqrt{2}(\cos(7\pi/3) + i\sin(7\pi/4))$.

QUESTION 2. [3 points] Considérez les matrices suivantes :

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} .$$

et les énoncés suivants :
(i) $YX^\top$ est définie.
(ii) La matrice Y est inversible.
(iii) XY est définie.
(iv) $ZX^\top$ est définie.
(v) XZ est définie.
(vi) $Y + X^\top X$ est définie.

Lesquels de ces énoncés sont vrais ?

A : (ii), (iv) et (v) sont vrais; B : (iii), (iv) et (v) sont vrais; C : (i), (iii) et (vi) sont vrais;

D : (ii) et (iv) sont vrais; E : (ii) et (vi) sont vrais.

Solution: C

QUESTION 3. [3 points] Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculez A^{-1} et parmi les réponses suivantes, encerclez la bonne.

A : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ B : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ C : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ D : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Solution:

$det(A) = 2 \times 3 - 1 \times 3 = 3 \neq 0$, then A is invertible and A^{-1} is given by
$A^{-1} = \frac{1}{2\times 3 - 1\times 3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Question 4. [5 points]

Déterminez pour quelles valeurs de b et c le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x + 3y = c \\ 3x + by = 2 \end{cases}$$

admet

(i) pas de solutions

(ii) une infinité de solutions

(iii) une solution unique

Solution:

On trouve en premier la matrice échelonnée de ce système

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & c \\ 3 & b & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - (3/2)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & c \\ 0 & b-9/2 & | & 2-3c/2 \end{bmatrix}.$$

(i) Pour aucune solution il faut que la dernière colonne soit une colonne pivot,, i.e. $b - 9/2 = 0$ et $2 - 3c/2 \neq 0 \Leftrightarrow b = 9/2$ et $c \neq 4/3$.

(ii) Pour une infinité de solutions, on a besoin d'au moins une variable libre, i.e. la deuxième ligne doit être $[0\ 0|\ 0] \Leftrightarrow b - 9/2 = 0$ et $2 - 3c/2 = 0, \Leftrightarrow b = 9/2$, $c = 4/3$.

(iii) Pour une solution unique les deux variables doivent être des variables de base, i.e. $b - 9/2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 9/2$ et $c \in$ arbitraire.

Question 5. [3 points] Lesquels de ces valeurs **NE SONT PAS** des valeurs propres de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A : 1; B : 0; C : −2; D : −1 ; E : 2.

Solution:

On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Selon la troisième colonne on a:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)(1)\right) = \lambda^2(1-\lambda)$$

Donc $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)\lambda^2 = 0$ quand $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 0$, qui sont les valeurs propres de A.

QUESTION 6. [4 points]

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

admet $\lambda = -1$ comme valeur propre. Trouvez l'espace propre de A associé à cette valeur propre.

Solution:

On doit résoudre $(B - (-1)I_3)\vec{x} = \vec{0}$. On a

$$B - (-1)I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - (1/2)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (1/2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc on a $x_1 = 4x_3,\ x_2 = -8x_3,\ x_3 \neq 0$ libre. D'où les vecteurs propres sont de la forme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -4x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vecteur propre associé à $\lambda = -1$ est donc $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

QUESTION 7. [6 points] Considérez le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= 2x - 2y\,. \end{cases}$$

(a) **Donnez** la matrice A correspondante à ce système linéaire **puis** trouvez ces valeurs et vecteurs propres.
(b) Donnez la solution générale de ce système.
(c) Trouvez la solution particulière avec condition initiale $x(0) = 2, y(0) = 5$.

Solution:
(a) On a $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Pour les valeurs propres on a For the eigenvalues, we find the characteristic equation

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3)\,.$$

Hence the eigenvalues are $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Donc les valeurs propres(les racines de $P_A(\lambda)$) sont: 0 et -3.
Pour chacune des valeurs propres on trouve un vecteur propre associé et donc on doit résoudre For each of these eigenvalues we solve $(A - \lambda I_2)\vec{x} = \vec{0}$.

- Pour $\lambda_1 = 0$ on a

$$A - (0)I_2 = A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

An eigenvector is then Donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Pour $\lambda = -3$ on a

$$A - (-3)I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (1/2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) La solution générale est donc

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a_1 e^{0t}\vec{v}_1 + a_2 e^{-3t}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 - (1/2)a_2 e^{-3t} \\ a_1 + a_2 e^{-3t} \end{bmatrix} \quad a_1,\ a_2 \text{ des constantes}\,.$$

(c) La solution particulière qui satisfait $x(0) = 2, y(0) = 5$ est donc

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - (1/2)a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a_1 - (1/2)a_2 & = & 2 \\ a_1 + a_2 & = & 5 \end{cases} .$$

De ceci on obtient $a_1 = 3$ et $a_2 = 2$ et d'où la solution devient

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 3\vec{v}_1 + 2e^{-3t}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 - (3/2)e^{-3t} \\ 3 + 2e^{-3t} \end{bmatrix} .$$