

**Université d'Ottawa**  
MAT 1732 B, Hiver 2018, Examen de mi session 2  
le Mercredi 28 Février 2018

Professeur: Becem Saidani

Nom \_\_\_\_\_ Numéro d'étudiant(e) \_\_\_\_\_

- L'examen comporte 7 questions. Vous devez donner des réponses détaillées pour chaque question.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de l'examen immédiatement. a sera le cas aussi POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE. En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus. Signature : \_\_\_\_\_
- Seules les calculatrices approuvées par la faculté sont autorisées (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).
- L'examen est à livre fermé et aucun document n'est permis.

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

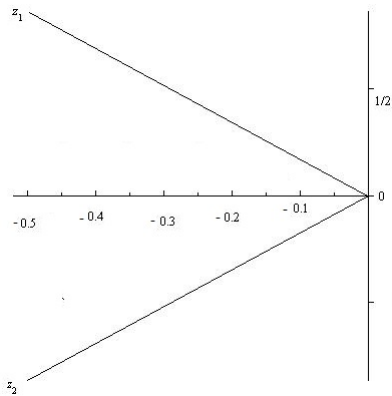
QUESTION 1. [6 points] Considérez l'équation suivante

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

- (a) Donnez sous la forme  $a + ib$  puis représentez sur le plan  $xOy$  les racines complexes de cette équation.

Solution:

Roots:  $z_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



- (b) Écrivez  $z_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  and  $z_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sous leur **forme polaire**  $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ .

Solution:

We have  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 1$ .

Since  $a = \frac{-1}{2} < 0$  and  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$  then  $\arg(z_1) = \pi - \arctan(|\frac{b}{a}|) = \pi - \arctan(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  and since  $z_2 = \bar{z}_1$  then  $\arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}$ . Hence, in polar form  $z_1 = \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$  and  $z_2 = \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3))$ .

QUESTION 2. [3 points] Considérez les matrices suivantes :

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -11 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

et les énoncés suivants :

- (i)  $XZ$  est définie.
- (ii)  $XY$  est définie.
- (iii)  $YX^\top$  est définie.
- (iv)  $ZX^\top$  est définie.
- (v)  $Y + X^\top X$  est définie.
- (vi) La matrice  $Y$  est inversible.

Lesquels de ces énoncés sont vrais ?

A : (iii), (iv) et (v) sont vrais;    B : (i), (iii) et (v) sont vrais;    C : (iii) et (vi) sont vrais;

D : (ii), (iii) et (v) sont vrais    E : (ii) et (vi) sont vrais.

Solution: D

QUESTION 3. [3 points]

Soit  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculez  $A^{-1}$  et parmi les réponses suivantes, encerclez la bonne.

$$A : \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \quad B : \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \quad C : \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \quad D : \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Solution:  $\det(A) = 3 \times 3 - 1 \times 3 = 6 \neq 0$ , then  $A$  is invertible and  $A^{-1}$  is given by

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \times 3 - 3 \times 1} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

QUESTION 4. [5 points] Déterminez pour quelles valeurs de  $b$  et  $c$  le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x + by = 2 \\ 2x + 3y = c \end{cases}$$

admet

- (i) pas de solutions
- (ii) une infinité de solutions
- (iii) une solution unique

Solution:

We first find the echelon form of the augmented matrix of this system. We have

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & b & 2 \\ 2 & 3 & c \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (2/3)R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 - 2b/3 & c - 4/3 \end{array} \right].$$

- (i) To have no solution the last column has to be a pivot column, i.e.  $3 - 2b/3 = 0$  and  $c - 4/3 \neq 0 \Leftrightarrow b = 9/2$  and  $c \neq 4/3$ .
- (ii) For infinitely many solutions, we need less pivots than variables, i.e. the second row has to be  $[0 \ 0 \ | \ 0] \Leftrightarrow 3 - 2b/3 = 0$  and  $c - 4/3 = 0$ . Hence  $b = 9/2$ ,  $c = 4/3$ .
- (iii) For a unique solution we the first and second columns have to be pivot columns; i.e.  $3 - 2b/3 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 9/2$  and  $c \in \text{arbitrary}$ .

QUESTION 5. [3 points] Lesquels de ces valeurs **NE SONT PAS** des valeurs propres de  $A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A : 1; B : 0; C : -2; D : -1 ; E : 2.

Solution:

On a  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ . Selon la troisième colonne on a:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda) \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) ((1 - \lambda)^2 - (1)(1)) = (-1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Donc  $P_A(\lambda) = (-1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2) = 0$  quand  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$  ou  $\lambda_3 = 2$ , qui sont les valeurs propres de  $A$ .

QUESTION 6. [4 points]

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

admet  $\lambda = -1$  comme valeur propre. Trouvez l'espace propre de  $A$  associé à cette valeur propre.

Solution:

On doit résoudre  $(B - (-1)I_3)\vec{x} = \vec{0}$ . On a

$$\begin{aligned} B - (-1)I_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (1/2)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1/2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et donc on a  $x_1 = -x_3$ ,  $x_2 = 2x_3$ ,  $x_3 \neq 0$  libre. D'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vecteur propre associé à  $\lambda = -1$  est donc  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

QUESTION 7. 6 [6 points] Considérez le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} x' &= -2x + 2y \\ y' &= -x + y. \end{cases}$$

- (a) **Donnez** la matrice  $A$  correspondante à ce système linéaire **puis** trouvez ces valeurs et vecteurs propres.  
 (b) Donnez la solution générale de ce système.  
 (c) Trouvez la solution particulière avec condition initiale  $x(0) = 2, y(0) = 5$ .

Solution:

(a) On a  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Pour les valeurs propres on a

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1).$$

Donc les valeurs propres (les racines de  $P_A(\lambda)$ ) sont: 0 et -1.

Pour chacune des valeurs propres on trouve un vecteur propre associé et donc on doit résoudre  $(A - \lambda I_2)\vec{x} = \vec{0}$ .

- Pour  $\lambda = 0$  on a

$$A - (0)I_2 = A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (1/2)R_1} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (-1/2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- Pour  $\lambda = -1$  on a

$$A - (-1)I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(b) La solution générale est donc

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a_1 e^{0t} \vec{v}_1 + a_2 e^{-t} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 e^{-t} \\ a_1 + a_2 e^{-t} \end{bmatrix} \quad a_1, a_2 \text{ des constantes.}$$

(c) La solution particulière qui satisfait  $x(0) = 2, y(0) = 5$  est donc

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 2 \\ a_1 + a_2 = 5 \end{cases}.$$

De ceci on obtient  $a_1 = 8$  et  $a_2 = -3$  et d'où la solution devient

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 8\vec{v}_1 - 3e^{-t}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 - 6e^{-t} \\ 8 - 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$