Université d'Ottawa

MAT 1732 B, Hiver 2018, Examen de mi session 1

le Mercredi 14 Février 2018

Professeur: Becem Saidani

Nom ____________________________ Numéro d'étudiant(e) _______________________

- L'examen comporte 7 questions. Vous devez donner des réponses détaillées pour chaque question.
- La durée de cet examen est de **80** minutes.
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangś dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de lexamen immédiatement. a sera le cas aussi POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE. En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus. Signature :______________________
- Seules les calculatrices approuvées par la faculté sont autorisées (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).
- L'examen est à livre fermé et aucun document n'est permis.

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

QUESTION 1. [4 points] Calculer la somme de Reimann à gauche pour l'intégrale $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$ lorsque la partition de l'intervalle $[0,1]$ comprend trois sous-intervalles égaux. Donner votre réponse avec une précision de deux chiffres après le point des décimales.

Solution: $1/3 * (f(0) + f(1/3) + f(2/3)) = 1/3(\ln(1) + \ln(4/3) + \ln(5/3))$

Question 2. [3 points] Résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{y\sqrt{x}}$$

avec la **condition initiale** $y(1) = -2\sqrt{e}$.

Parmi les réponses suivantes, encerclez la bonne.

$\mathrm{A}: y = \sqrt{8e^{\sqrt{x}} + 4e}$; $\mathrm{B}: y = \sqrt{8e^{\sqrt{x}}}$; $\mathrm{C}: y = -\sqrt{8e^{\sqrt{x}} - e}$; $\mathrm{D}: y = -\sqrt{8e^{\sqrt{x}} - 4e}$;
$\mathrm{E}: y = \sqrt{8e^{\sqrt{x}} - 4e}$

Solution: This is a **Separable** Differential equation.
Separate: $ydy = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **Integrate:** $\int ydy = \int \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Compute as follows: (using the power rule and a SUB: $u = \sqrt{x}$, so $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$)
$\frac{y^2}{2} = 2\int e^u 2du = 4\int e^u du = 4e^u + c = 4e^{\sqrt{x}} + c$, where c is a number.

The initial condition says: $2\sqrt{e} = y(1)$, so $4e = y(1)^2$, hence $2e = \frac{(y(1))^2}{2} = 4e^1 + c$, thus $c = 2e - 4e = -2e$.

From $\frac{y^2}{2} = 4e^{\sqrt{x}} - 2e$, one has $y = \pm\sqrt{8e^{\sqrt{x}} - 4e}$. Since the Initial Condition is negative, it follows that the solution is ONLY: $y = -\sqrt{8e^{\sqrt{x}} - 4e}$.

QUESTION 3. [5 points] Pour l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 11x + 7}{x^2 - 5x + 6}\, dx.$$

Encercler le ou les terme(s) qui **n'apparaient pas** dans votre réponse final ?

A : x^2; B : $4\ln|x-3|$; C : $-5\ln|x-2|$; D : $-4\ln|x+3|$;

SOLUTION: By LONG DIVISION one has that $\frac{2x^3-10x^2+11x+7}{x^2-5x+6} = 2x + \frac{-x+7}{x^2-5x+6}$, which can be written as:

$2x + \frac{-x+7}{x^2-5x+6}$. For the second term we use Partial Fractions:

$\frac{-x+7}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, hence $-x+7 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - 3A - 2B$.

Hence $A + B = -1$, and $-3A - 2B = 7$,
Thus $A = -1 - B$ and $-4(-1-B) - 2B = 7$.
We get $B = 4$ and $A = -5$.

Our integral becomes: $x^2 - 5\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + c$, c a number.

QUESTION 4. (4 points) Étudiez la convergence de l'intégrale impropre suivante. Si elle converge, déterminez sa valeur.

$$\int_2^\infty \frac{2}{4+8x^2}dx$$

SOLUTION: By the very definition of an improper integral one has:
$I = \lim\limits_{t\to\infty} \int_2^t \frac{2}{4+8x^2}dx =$
$\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{1+2x^2}dx =$
$\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx.$
Now use a SUB: $u = \sqrt{2}x$, and notice that $\frac{du}{dx} = \sqrt{2}$, hence $\frac{du}{\sqrt{2}} = dx$.
Our integral becomes:
$I = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty} \int_{2\sqrt{2}}^{t\sqrt{2}} \frac{1}{1+(u)^2}\frac{du}{\sqrt{2}} =$
$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{t\to\infty} \arctan(u)|_{2\sqrt{2}}^{t\sqrt{2}} =$
$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{t\to\infty} \{\arctan(t\sqrt{2}) - \arctan(2\sqrt{2})\} =$
$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\frac{\pi}{2} - \arctan(2\sqrt{2})\}$, thus it is convergent.

Question 5. (5 points) Trouver l'aire de la région bornée par les courbes de $f(x) = x^{-1}$ et $g(x) = x^{-2}$, et les droites $x = 1/2$ et $x = 2$.

- Pour pouvoir calculer l'aire entre deux courbes nous devons premièrement déterminer tous les points d'intersection de ces courbes qui tombent dans l'intervalle $[1/2, 2]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^{-1} &= x^{-2} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} \\ x &= 1 \text{ puisque } x \neq 0 \text{ par contrainte du domaine.} \end{aligned}$$

- Ensuite, nous divisons l'intervalle donné par les points d'intersections que nous avons trouvés. Donc,

$$[1/2, 2] = [1/2, 1] \cup [1, 2].$$

- Sur chacun des sous-intervalles, nous déterminons laquelle des deux fonctions est supérieure. Nous pouvons déterminer ceci soit graphiquement ou algébriquement :

  Algébriquement :

x	$[1/2, 1[$	$]1, 2]$
$f(x)$	$f(3/4) = 4/3 \approx 1,33$	$f(3/2) = \frac{2}{3} \approx 0.66$
$g(x)$	$g(3/4) = \frac{16}{9} \approx 1.77$	$g(3/2) = \frac{4}{9} \approx 0.44$

Dans chacun des cas, nous déterminons que

$$g(x) \geq f(x) \qquad \text{sur } [1/2, 1]$$

$$f(x) \geq g(x) \qquad \text{sur } [1, 2]$$

- Maintenant nous pouvons construire l'intégrale qui calcul l'aire voulu :

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/2}^{1} g(x) - f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\,dx \\ &= \int_{1/2}^{1} x^{-2} - x^{-1}\,dx + \int_{1}^{2} x^{-1} - x^{-2}\,dx \\ &= \left[-x^{-1} - \ln|x|\right]_{1/2}^{1} + \left[\ln|x| - x^{-1}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Question 6. (6 points) L'équation différentielle suivante décrit le nombre de zombies $z(t)$ sur une île au temps t.

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = k(z-1)(z+1)\ln(\frac{500}{z})$$

avec k une constante positive.

(a) Déterminer les points d'équilibres (qui ont un sens biologique)

(b) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre dans (a) en utilisant le test de la première dérivée.

(c) Donnez le portrait de phase de cette équation différentielle.

(d) Si on suppose que initialement on a 495 zombies, déterminer le nombre de zombies à long terme.

Solution: (a) We solve for z in $f(z) = 0$ as follows: $k(z-1)(z+1)\ln(\frac{500}{z}) = 0$, thus either $z - 1 = 0$, $z + 1 = 0$, or $\ln(\frac{500}{z}) = 0$; hence $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ and $z_3 = 500$. The equilibrium points that are bio meaningful are: $z_1 = 1$ and $z_3 = 500$ since they are positive.

(b) We compute the derivative by product rule (since $f(z) = k((z^2-1))(\ln(500) - \ln(z)))$:

$$f'(z) = k\{(2z)(\ln(500) - \ln(z)) + (z^2-1)(-\frac{1}{z})\}$$

.

Note that: $f'(1) = 2k\ln(500) > 0$, so $z_1 = 1$ is UNSTABLE. (Recall that $k > 0$.)

Note that: $f'(500) = k(500^2-1)\frac{-1}{500} < 0$, so $z_3 = 400$ is STABLE.

(c) Here is the phase line diagram:

(d) Since 495 is in between two equilibrium points (z_1 being unstable and z_3 being stable) and close to z_3, a solution starting at 495 converges to the stable equilibrium (which is 500)

Question 7. (5 points) Déterminer la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = 3\ln(2x)$$

sur l'intervalle $[1;3]$.

SOLUTION: By its formula, the average value is $A = \frac{1}{3-1}\int_1^3 3\ln(2x)dx = \frac{1}{2} \times 3\int_1^3 1 \times \ln(2x)dx = \frac{3}{2}\int_1^3 1 \times \ln(2x)dx$.

Use Integration by Parts: $u'(x) = 1$, and $v(x) = \ln(2x)$ imply that $u(x) = x$ and $v'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

Thus $A = \frac{3}{2}(\{x\ln(2x)|_1^3 - \int_1^3 x\frac{1}{x}dx\}) =$
$\frac{3}{2}(\{3\ln(6) - \ln(2) - \int_1^3 1dx\}) =$
$\frac{3}{2}(\{3\ln(6) - \ln(2) - x|_1^3\}) =$
$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\{3\ln(6) - \ln(2) - 3 + 1\}) =$
$\frac{3}{2}(\{3\ln(6) - \ln(2) - 2\})$.