Devoir 10 (hiver 2018)

[IMPRIMER]

MAT1722 -- Hiver 2018, Devoir 10 (hiver 2018)
Balkissa Toure, 30/03/18 at 11:20:38 EDT

Question 1: *Résultat 0/3*

Le plan tangent à la surface d'équation

$$z = \frac{x - 2y + 2}{3x + y + 8}$$

au point où $(x, y) = (0, 1)$ a pour équation $z =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**(0)+(1/9)*(x-(0))+(-2/9)*(y-(1))**

Note: 0/1.0

.
(écrire la fonction appropriée de x et de y)

Résultat final: 0.0×1/1 = 0%
Commentaire:

On trouve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(3x + y + 8) - 3\,(x - 2y + 2)}{(3x + y + 8)^2} = \frac{7y + 2}{(3x + y + 8)^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2\,(3x + y + 8) - (x - 2y + 2)}{(3x + y + 8)^2} = \frac{-7x - 18}{(3x + y + 8)^2} .$$

Au point où $(x, y) = (0, 1)$, cela donne $z = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,(0, 1) = 1/9 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,(0, 1) = \text{-}2/9 .$$

Donc, l'équation du plan tangent est

$$z = 0 + \frac{\partial z}{\partial x}\,(0, 1)\,(x - 0) + \frac{\partial z}{\partial y}\,(0, 1)\,(y - 1)$$

$$= 0 + (1/9)\,(x - 0) + (\text{-}2/9)\,(y - 1) .$$

Question 2: *Résultat 0/4*

Déterminer l'approximation linéaire de la fonction

$$f\,(r, t) = \arctan\,(2r^4\,t)$$

au point $(r, t) = (1, 0)$.

$L\,(r, t) =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**2.0*(t)**

Note: 0/1.0

(écrire la fonction appropriée de r et de t).

En utilisant cette approximation linéaire, estimer
$f\,(1.003, \text{-}0.003) \cong$

Votre réponse	Réponse correcte
	-0.006±0.001

Note: 0/1.0

(la réponse numérique doit être précise à ± 0.001).

Résultat final: 0.0×1/2 + 0.0×1/2 = 0% + 0%
Commentaire:

On a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{1 + (2r^4 t)^2} \; \frac{\partial}{\partial r} \; (2r^4 t) = \frac{8r^3 t}{1 + 4r^8 t^2} \; ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{1 + (2r^4 t)^2} \; \frac{\partial}{\partial t} \; (2r^4 t) = \frac{2r^4}{1 + 4r^8 t^2} \; .$$

Au point $(r, t) = (1, 0)$, on obtient $f \;\; (1, 0) = \arctan (0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial r} \; (1, 0) = \frac{0}{1} = 0 \; ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \; (1, 0) = \frac{2 \cdot 1^4}{1} = 2 \; .$$

Donc, l'approximation linéaire de $f \;\; (r, t)$ en ce point est

$$L \;\; (r, t) = 0 + 0 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (t - 0) = 2t \; .$$

On en déduit

$$f \;\; (1.003, \text{-}0.003) \quad \cong \quad L \;\; (1.003, \text{-}0.003) = 2 \cdot (\text{-}0.003) = \text{-}0.006 \; .$$

Question 3: *Résultat 0/3*

On mesure 24 cm pour la base d'un triangle rectangle, et 10 cm pour sa hauteur.
La mesure de la base est précise à ± 1 cm tandis celle de la hauteur l'est à ± 1 cm.
Calculer la longueur de l'hypothénuse puis, à l'aide des différentielles, estimer l'erreur sur cette longueur.

L'hypothénuse mesure

Votre réponse	Réponse correcte
	26±0.1

Note: 0/1.0

cm
avec | Erreur | $\leq$

Votre réponse	Réponse correcte
	1.31±0.1

Note: 0/2.0

cm
(arrondir vos réponses à ± 0.1 près)

Résultat final: 0.0×1/3 + 0.0×2/3 = 0% + 0%
Commentaire:

Soient x la base, et y la hauteur du triangle. Son hypothénuse est $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La différentielle de z est

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \; dx + \frac{\partial z}{\partial y} \; dy$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; dy \; .$$

Lorsque $x = 24$ et $y = 10$, l'hypothénuse vaut

$$z = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$$

et on trouve

$$dz = \frac{24}{26} \; dx + \frac{10}{26} \; dy = \frac{12}{13} \; dx + \frac{5}{13} \; dy \; .$$

Par hypothèse, les erreurs sur x et y satisfont $|\Delta x| \;\; \leq \;\; 1$ et $|\Delta y| \;\; \leq \;\; 1$.

On en déduit

$$|\Delta z| \;\; \cong \;\; |dz| = \left| \frac{12}{13} \; \Delta x + \frac{5}{13} \; \Delta y \right|$$

$$\leq \;\; \frac{12}{13} \; (1) + \frac{5}{13} \; (1)$$

$$\cong \quad 1.31 \; .$$