

SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION DU 16 MARS À 10H00

1. [6 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$.

Solution: Le terme général de cette série est $a_n = \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|2x-1|^{n+1}}{5^{n+1} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{5^n \sqrt{n}}{2^n |2x-1|^n} \\ &= \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{1}{1+(1/n)}} \rightarrow \frac{|2x-1|}{5} \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|2x-1|/5 < 1 \iff |2x-1| < 5 \iff -5 < 2x-1 < 5 \iff \boxed{-2 < x < 3},$$

et elle diverge **si**

$$\begin{aligned} |2x-1|/5 > 1 \iff |2x-1| > 5 \iff 2x-1 < -5 \text{ ou } 2x-1 > 5 \\ \iff \boxed{x < -2 \text{ ou } x > 3}. \end{aligned}$$

Le centre de la série est $x = 1/2$ et son rayon de convergence est $\boxed{R = 5/2}$.

- Si $x = -2$, la série devient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

C'est une série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/\sqrt{n}$. Comme $b_n \downarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (car $\sqrt{n} \uparrow \infty$), cette série est convergente.

- Si $x = 3$, la série devient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.

Elle est divergente (série de Riemann avec $p = 1/2 \leq 1$).

L'intervalle de convergence de la série est donc $[-2, 3)$.

2. [2 points] Calculez la somme de la série télescopique $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(n-1)(n+1)}$ si elle existe.

- A) $-1/2$ B) $2/3$ C) $7/6$ D) $5/2$ E) $9/2$ F) ∞

Solution: On trouve $\frac{6}{(n-1)(n+1)} = \frac{3((n+1) - (n-1))}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=2}^k \frac{6}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^k \left(\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^k \frac{3}{n-1} - \sum_{n=2}^k \frac{3}{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \cdots + \frac{3}{k-2} + \frac{3}{k-1} \right) - \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{3}{k} + \frac{3}{k+1} \right) \\ &= \frac{3}{1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{k} - \frac{3}{k+1}, \end{aligned}$$

et par suite $\sum_{n=2}^k \frac{6}{(n-1)(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

3. [2 points] Une série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait $0 \leq a_n \leq \frac{4^n}{3^n}$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire d'elle?

- A) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = 2$ B) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = 4$
 C) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = 2$ D) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = 4$
 E) Elle est divergente. F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

Solution: On ne peut rien dire car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n} = \infty$ (série géométrique de raison $4/3 > 1$).

4. [3 points] Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

• Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente. Vrai

• Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Vrai

• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. Faux

5. [5 points] Selon le test de l'intégrale, combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ doit-on additionner pour que l'erreur d'approximation soit au plus 10^{-3} ?

Solution: C'est une série à valeurs **positives** de terme général $a_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ est une fonction décroissante de x à valeurs positives pour $x \geq 0$. En posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{(n+1)^3} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

le critère de l'intégrale donne

$$R_k = s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} \right]_k^t = \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

On trouve

$$\frac{1}{2(k+1)^2} \leq 10^{-3} \iff 2(k+1)^2 \geq 10^3 \iff k+1 \geq \sqrt{500} \cong 22.36 \iff k \geq 22.$$

Il suffit donc d'additionner 22 termes.

6. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n 4^n}$.

(i) [3 points] Déterminez une série pour $f'(2)$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: On vérifie facilement que le rayon de convergence de la série $f(x)$ est $R = 4$. En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)^n}{n 4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{4^n},$$

pour tout x avec $|x-1| < 4$, donc

$$f'(2) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}}.$$

En observant qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $1/4$, on trouve que $f'(2) = 1/3$.

(ii) [3 points] Déterminez une série pour $\int_0^2 f(x) dx$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(x-1)^n}{n 4^n} dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)4^n},$$

où C désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de f pour $|x-1| < 4$, c'est-à-dire sur l'intervalle $(-3, 5)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n(n+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n(2n+1)16^n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)16^n}} \end{aligned}$$

7 a) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \ln(1 + 4x^2)$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\ln(1 + 4x^2) = \ln(1 - (-4x^2)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4x^2)^n}{n} = 4x^2 - 8x^4 + \frac{64}{3}x^6 - \dots$$

si $|-4x^2| < 1$, donc si $|x| < 1/2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 1/2}$.

b) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = (4 + x^2)^{5/2}$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\begin{aligned} (4 + x^2)^{5/2} &= (4(1 + (x^2/4)))^{5/2} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5/2}{n} (x^2/4)^n \\ &= 32 + 32(5/2)(x^2/4) + 32 \frac{(5/2)(3/2)}{2} (x^2/4)^2 + \dots \\ &= 32 + 20x^2 + \frac{15}{4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

si $|x^2/4| < 1$, donc si $|x| < 2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 2}$.