Devoir 8 (hiver 2018)

[IMPRIMER]

MAT1722 -- Hiver 2018, Devoir 8 (hiver 2018)
Balkissa Toure, 14/03/18 at 17:53:30 EDT

Question 1: *Résultat 0/1*

Une fonction $f(x)$ admet le développement en série suivant autour du point $x = 2$:

$$f(x) = 1 + 3(x-2) - 4(x-2)^2 - 2(x-2)^3 + \cdots$$

Incorrecte

Quel est $f^{(1)}(2)$?

Votre réponse: Aucune réponse

La réponse correcte 3

Commentaire:

Le coefficient de $(x-2)^1$ est $\frac{f^{(1)}(2)}{1!}$.

Donc, $f^{(1)}(2) = 3 \cdot (1!) = 3$.

Question 2: *Résultat 0/2*

La fonction

$$f(x) = (1+3x)\ e^{3x^2}$$

admet un développement en série de MacLaurin

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

Quels sont ses coefficients?

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**1**

Note: 0/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**3**

Note: 0/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**3**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**9**

Note: 0/1.0

$c_4 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**9/2**

Note: 0/1.0

Résultat final: 0.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 = 0% + 0% + 0% + 0% + 0%

Commentaire:

On a

$$e^{3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!} = 1 + (3)x^2 + \frac{(3)^2}{2}x^4 + \frac{(3)^3}{6}x^6 + \cdots$$

Donc,

$$(1+3x)e^{3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3)^n}{n!}x^{2n} + 3x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3)^n}{n!}x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3)^n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(3)^n}{n!} x^{2n+1}$$

$$= (1 + (3)x^2 + (9/2)x^4 + \cdots) + (3x + (9)x^3 + \cdots)$$

$$= 1 + 3x + (3)x^2 + (9)x^3 + (9/2)x^4 + \cdots$$

Question 3: *Résultat 0/1*

Les développements en séries de MacLaurin de deux fonctions f et g commencent ainsi:

$$f(x) = 1 + 4x - 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$g(x) = 2 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + \cdots$$

Leur produit $f(x)\,g(x)$ admet aussi un développement en série de MacLaurin

$$f(x)\,g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Quels sont ses coefficients?

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**2**

Note: 0/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**6**

Note: 0/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**-11**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**24**

Note: 0/1.0

Résultat final: 0.0×1/4 + 0.0×1/4 + 0.0×1/4 + 0.0×1/4 = 0% + 0% + 0% + 0%

Commentaire:

On trouve

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &= (1 + 4x - 3x^2 + 4x^3 + \cdots)(2 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + \cdots) \\ &= 1\ (2 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + \cdots) \\ &\quad +4x\ (2 - 2x + 3x^2 + \cdots) \\ &\quad -3x^2\ (2 - 2x + \cdots) \\ &\quad +4x^3\ (2 + \cdots) \\ &\quad + \cdots \\ &= 2 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + \cdots \\ &\quad +8x - 8x^2 + 12x^3 + \cdots \\ &\quad -6x^2 + 6x^3 + \cdots \\ &\quad +8x^3 + \cdots \\ &\quad + \cdots \\ &= 2 + (6)x + (\text{-}11)x^2 + (24)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Question 4: *Résultat 0/1*

Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{x^2}$$

Incorrecte

grâce à un développement limité en série de MacLaurin.

Votre réponse: Aucune réponse

La réponse correcte 3

Commentaire:

Pour tout x réel on a

$$e^{3x^2} - 1 = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!} = 3x^2 + (9/2)\,x^4 + \cdots$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} (3 + (9/2)\,x^2 + \cdots) = 3.$$

Question 5: *Résultat 0/2*

Déterminer les premiers coefficients du développement en série de MacLaurin

$$(1 - 3x)^{\frac{2}{3}} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**1**

Note: 0/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**-2**

Note: 0/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**-1**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**-4/3**

Note: 0/1.0

Résultat final: 0.0×1/4 + 0.0×1/4 + 0.0×1/4 + 0.0×1/4 = 0% + 0% + 0% + 0%

Commentaire:

La formule du binôme donne

$$(1 + y)^{\frac{2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2\,/\,3}{n} y^n$$

$$= 1 + (\tfrac{2}{3})\,y + \frac{(\frac{2}{3})\,(\frac{2}{3} - 1)}{2}\,y^2 + \frac{(\frac{2}{3})\,(\frac{2}{3} - 1)\,(\frac{2}{3} - 2)}{3!}\,y^3 + \cdots$$

$$= 1 + (2/3)\,y + (\text{-}1/9)\,y^2 + (4/81)\,y^3 + \cdots$$

pour tout y avec $|y| < 1$.

En posant $y = -3x$, on en déduit que, pour tout x avec $|x| < 1\,/\,3$, on a:

$$(1 - 3x)^{\frac{2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2\,/\,3}{n} (-3x)^n$$

$$= 1 + (2/3)\,(-3x) + (\text{-}1/9)\,(-3x)^2 + (4/81)\,(-3x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + (\text{-}2)\,x + (\text{-}1)\,x^2 + (\text{-}4/3)\,x^3 + \cdots$$

Question 6: *Résultat 0/2*

Déterminer les premiers termes du développement en série de MacLaurin

$$\int \frac{1}{(1 - 4x)^3}\,\mathrm{d}x = C + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

où C représente la constante d'intégration.

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**1**

Note: 0/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**6**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
Aucune réponse	**32**

Note: 0/1.0

Résultat final: 0.0×1/3 + 0.0×1/3 + 0.0×1/3 = 0% + 0% + 0%

Commentaire:

Pour $|x| < \frac{1}{4}$, on a $|-4x| < 1$ et alors

$$\frac{1}{(1-4x)^3} = (1+(-4x))^{-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-4x)^n$$

$$= 1 + (-3)(-4x) + \frac{(-3)(-3-1)}{2!}(-4x)^2$$

$$+ \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}(-4x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + 12x + 96x^2 + 640x^3 + \cdots$$

On en déduit

$$\int \frac{1}{(1-4x)^3}\,\mathrm{d}x = C + x + \frac{12}{2}x^2 + \frac{96}{3}x^3 + \frac{640}{4}x^4 + \cdots$$

$$= C + x + (6)\,x^2 + (32)\,x^3 + \cdots$$

pour tout x avec $|x| < \frac{1}{4}$.

Question 7: *Résultat 0/1*

Les courbes de niveau de la fonction

$f\ (x, y) = 2x - 16y^2 + 4$

sont :

Incorrecte

Votre réponse:

Réponse correcte: des paraboles

Commentaire: L'équation de la courbe de niveau $f\ (x, y) = C$ est

$$2x - 16y^2 + 4 = C\ ,$$

ou encore

$$x = \frac{16}{2}\,y^2 + \frac{C-4}{2}\ .$$

Elle représente une parabole.