Devoir 8 (hiver 2018)

[IMPRIMER]

MAT1722 -- Hiver 2018, Devoir 8 (hiver 2018)
Balkissa Toure, 14/03/18 at 17:54:15 EDT

Question 1: *Résultat 1/1*

Une fonction $f(x)$ admet le développement en série suivant autour du point $x = 2$:

$$f(x) = 2 + 3(x-2) - 2(x-2)^2 - 3(x-2)^3 + \cdots$$

Correcte

Quel est $f^{(1)}(2)$?

Votre réponse: 3

Commentaire:

Le coefficient de $(x-2)^1$ est $\dfrac{f^{(1)}(2)}{1!}$.

Donc, $f^{(1)}(2) = 3 \cdot (1!) = 3$.

Question 2: *Résultat 0.4/2*

La fonction

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{1+3x}$$

admet un développement en série de MacLaurin

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

Quels sont ses coefficients ?

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
1	**1**

Note: 1/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
-2/3	**-3**

Note: 0/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
-2	**7**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
2/9	**-21**

Note: 0/1.0

$c_4 =$

Votre réponse	Réponse correcte
2/3	**191/3**

Note: 0/1.0

Résultat final: 1.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 + 0.0×1/5 = 20% + 0% + 0% + 0% + 0%

Commentaire:

On a

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - (2)x^2 + (2/3)x^4 + \cdots$$

et

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + 81x^4 - \cdots$$

(pour tout x avec $|x| < \frac{1}{3}$).

Donc,

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(2x)}{1+3x} &= (1-(2)\,x^2+(2/3)\,x^4+\cdots)\,(1-3x+9x^2-27x^3+81x^4+\cdots) \\
&= (1-3x+9x^2-27x^3+81x^4+\cdots) \\
&\quad -(2)\,x^2\ \ (1-3x+9x^2+\cdots) \\
&\quad\quad +(2/3)\,x^4\ \ (1-3x+\cdots) \\
&\quad\quad\quad +\cdots \\
&= 1-3x+9x^2-27x^3+81x^4+\cdots \\
&\quad -(2)\,x^2+6x^3-18x^4+\cdots \\
&\quad\quad +(2/3)\,x^4+\cdots \\
&\quad\quad\quad +\cdots \\
&= 1-3x+(7)\,x^2+(\text{-}21)\,x^3+(191/3)\,x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

Question 3: *Résultat 0.75/1*

Les développements en séries de MacLaurin de deux fonctions f et g commencent ainsi:

$$f(x) = 4+4x-4x^2+4x^3+\cdots$$

$$g(x) = 2-4x+4x^2-3x^3+\cdots$$

Leur produit $f(x)\,g(x)$ admet aussi un développement en série de MacLaurin

$$f(x)\,g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Quels sont ses coefficients?

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
8	**8**

Note: 1/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
-8	**-8**

Note: 1/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
-8	**-8**

Note: 1/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
20	**28**

Note: 0/1.0

Résultat final: 1.0×1/4 + 1.0×1/4 + 1.0×1/4 + 0.0×1/4 = 25% + 25% + 25% + 0%

Commentaire:

On trouve

$$
\begin{aligned}
f(x)\,g(x) &= (4+4x-4x^2+4x^3+\cdots)\,(2-4x+4x^2-3x^3+\cdots) \\
&= 4\ \ (2-4x+4x^2-3x^3+\cdots) \\
&\quad +4x\ \ (2-4x+4x^2+\cdots) \\
&\quad\quad -4x^2\ \ (2-4x+\cdots) \\
&\quad\quad\quad +4x^3\ \ (2+\cdots) \\
&\quad\quad\quad\quad +\cdots \\
&= 8-16x+16x^2-12x^3+\cdots \\
&\quad +8x-16x^2+16x^3+\cdots \\
&\quad\quad -8x^2+16x^3+\cdots \\
&\quad\quad\quad +8x^3+\cdots \\
&\quad\quad\quad\quad +\cdots \\
&= 8+(\text{-}8)\,x+(\text{-}8)\,x^2+(28)\,x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

Question 4: *Résultat 1/1*

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x^2}-1}{x^2}$$

grâce à un développement limité en série de MacLaurin.

Correcte

Votre réponse: -3

Commentaire: Pour tout x réel on a

$$e^{-3x^2} - 1 = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} = -3x^2 + (9/2)\,x^4 + \cdots$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} (-3 + (9/2)\,x^2 + \cdots) = -3.$$

Question 5: *Résultat 1/2*

Déterminer les premiers coefficients du développement en série de MacLaurin

$$(9 + x^2)^{\frac{5}{2}} = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + c_3 x^6 + \cdots$$

$c_0 =$

Votre réponse	Réponse correcte
243	**243**

Note: 1/1.0

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
135/2	**135/2**

Note: 1/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
405/8	**45/8**

Note: 0/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
135/16	**5/48**

Note: 0/1.0

Résultat final: 1.0×1/4 + 1.0×1/4 + 0.0×1/4 + 0.0×1/4 = 25% + 25% + 0% + 0%

Commentaire:

On a

$$(9 + x^2)^{\frac{5}{2}} = 9^{\frac{5}{2}}(1 + \frac{x^2}{9})^{\frac{5}{2}} = 243(1 + \frac{x^2}{9})^{\frac{5}{2}}.$$

La formule du binôme donne par ailleurs

$$(1 + y)^{\frac{5}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5/2}{n} y^n$$

$$= 1 + \frac{5}{2}y + \frac{(\frac{5}{2})(\frac{5}{2} - 1)}{2} y^2 + \frac{(\frac{5}{2})(\frac{5}{2} - 1)(\frac{5}{2} - 2)}{3!} y^3 + \cdots$$

$$= 1 + (5/2)\,y + (15/8)\,y^2 + (5/16)\,y^3 + \cdots$$

pour tout y avec $|y| < 1$.

En posant $y = \frac{x^2}{9}$, on en déduit que, pour $|x| < 3$, on a

$$(9 + x^2)^{\frac{5}{2}} = 243(1 + \frac{x^2}{9})^{\frac{5}{2}}$$

$$= 243\,(1 + (5/2)\,\frac{x^2}{3^2} + (15/8)\,(\frac{x^2}{9})^2 + (5/16)\,(\frac{x^2}{9})^3 + \cdots)$$

$$= 243 + (135/2)\,x^2 + (45/8)\,x^4 + (5/48)\,x^6 + \cdots$$

Question 6: *Résultat 1.33/2*

Déterminer les premiers termes du développement en série de MacLaurin

$$\int \sqrt{16+9x^2}\ \mathrm{d}x = C + c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + \cdots$$

où C représente la constante d'intégration.

$c_1 =$

Votre réponse	Réponse correcte
4	**4**

Note: 1/1.0

$c_2 =$

Votre réponse	Réponse correcte
3/8	**3/8**

Note: 1/1.0

$c_3 =$

Votre réponse	Réponse correcte
-3/32	**-81/2560**

Note: 0/1.0

Résultat final: 1.0×1/3 + 1.0×1/3 + 0.0×1/3 = 33% + 33% + 0%

Commentaire:

On a

$$\sqrt{16+9x^2} = 4\sqrt{1+\frac{9}{16}x^2}$$

$$= 4(1+\frac{9}{16}x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(\frac{9}{16x^2})^n$$

$$= 4\,(1+\frac{1}{2}(\frac{9}{16}x^2) + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2}(\frac{9}{16}x^2)^2 + \cdots)$$

$$= 4 + (9/8)\,x^2 - (81/512)\,x^4 + \cdots$$

si $\left|\frac{9}{16}x^2\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{4}{3}$.

On en déduit

$$\int \sqrt{16+9x^2}\ \mathrm{d}x = C + \frac{9}{8}x + \frac{9/8}{3}x^3 - \frac{81/512}{5}x^5 + \cdots$$

$$= C + 4x + (3/8)\,x^3 - (81/2560)\,x^5 + \cdots$$

si $|x| < \frac{4}{3}$.

Question 7: *Résultat 0/1*

Les courbes de niveau de la fonction

$f\ (x,y) = 9x^2 - 4y^2 - 3$

sont :

Incorrecte

Votre réponse: des ellipses

Réponse correcte: des hyperboles d'asymptotes $y = \pm(3/2)\,x$

Commentaire: L'équation de la courbe de niveau $f\ (x,y) = C$ est

$$9x^2 - 4y^2 = C + 3\ ,$$

ou encore

$$(3x-2y)\,(3x+2y) = C + 3\ .$$

Elle représente une hyperbole d'asymptotes $3x \pm 2y = 0$, c'est-à-dire $y = \pm(3/2)\,x$.