Devoir 7 (hiver 2018)

[IMPRIMER]

MAT1722 -- Hiver 2018, Devoir 7 (hiver 2018)
Balkissa Toure, 10/03/18 at 13:46:48 EST

Question 1: *Résultat 1/1*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+4)\,4^n}.$$

Correcte

Écrire seulement la lettre i si le rayon est infini. Sinon donner la valeur exacte.

Votre réponse: 4

Commentaire: Le terme général de cette série est

$$a_n = \frac{(x-4)^n}{(n+4)\,4^n}\ .$$

On trouve

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n\ |} = \frac{|x-4|^{n+1}}{(n+5)\,4^{n+1}} \cdot \frac{(n+4)\,4^n}{|x-4|^n}$$

$$= \frac{|x-4|}{4} \cdot \frac{n+4}{n+5}$$

$$= \frac{|x-4|}{4} \cdot \frac{1+4\,/\,n}{1+5\,/\,n}$$

$$\to \frac{|x-4|}{4}$$

lorsque $n \to \infty$. En vertu du test du quotient, cela signifie que

- la série converge si $\frac{|x-4|}{4} < 1$, c'est-à-dire si $|x-4| < 4$;
- la série diverge si $\frac{|x-4|}{4} > 1$, c'est-à-dire si $|x-4| > 4$.

Le rayon de convergence de cette série est donc $R = 4$.

Question 2: *Résultat 2/2*

On considère la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n\ \sqrt{n+1}}.$$

Son intervalle de convergence est de l'une des formes (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ ou $[a, b]$.

(I)

Quel est a?

Correcte

Votre réponse: 1

(II)

La série converge en $x = a$. Vrai ou Faux?

Correcte

Votre réponse: True

(III)

Quel est b?

Correcte

Votre réponse: 5

(IV)

La série converge en $x = b$. Vrai ou Faux?

Correcte

Votre réponse:

False

Commentaires:

Le terme général de cette série est

$$a_n = \frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n+1}}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-3|^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+2}} \cdot \frac{2^n\sqrt{n+1}}{|x-3|^n} \\ &= \frac{|x-3|}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \\ &= \frac{|x-3|}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} \\ &\to \frac{|x-3|}{2}\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$.
En vertu du test du quotient, cela signifie que la série converge si

$$\begin{aligned}\frac{|x-3|}{2} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |x-3| < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < x-3 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 < x < 5.\end{aligned}$$

Donc, on a $a = 1$ et $b = 5$.

– Pour $x = 1$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

C'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général est $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, fonction décroissante de n qui tend vers 0 pour $n \to \infty$.
Elle est donc convergente en vertu du test des séries alternées.

– Pour $x = 5$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

(série du type $\sum \frac{1}{n^p}$ avec $p \leq 1$).

Elle est donc divergente.

Question 3: *Résultat 1/1*

Développez la fonction

$$\frac{1}{1-5x^2}$$

en série de puissances autour de $x = 0$. Quel est le coefficient de x^8 dans cette série?

Correcte

Votre réponse: 625

Commentaire: On trouve

$$\frac{1}{1-5x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (5x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{2n}$$

si $\left|5x^2\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 5^{1/2}$.

On a $8 = 2n$ pour $n = 4$. Donc le coefficient cherché est $5^4 = 625$.

Question 4: *Résultat 0/1*

Développez la fonction

$$\frac{x}{x-4}$$

Incorrecte

en série de puissances autour de $x = 0$. Quel est le coefficient de x^6 dans cette série?

Votre réponse: $\frac{-1}{4^7}$

La réponse correcte $\frac{-1}{4^6}$

Commentaire: On trouve

$$\frac{x}{x-4} = 1 + \frac{4}{x-4}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - x / 4}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{4})^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4^n} x^n$$

si $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 4$.

Donc le coefficient de x^6 est $\frac{-1}{4^6}$.

Question 5: *Résultat 3/3*

On considère la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, x^{2n}}{16^n}.$$

(i) Quel est le rayon de convergence de cette série?
Écrire la lettre i si le rayon est infini.

Votre réponse	Réponse correcte
4	

Note: 2/2.0

(ii) Calculez le développement en série de la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ autour de $x = 0$.
Quel est le coefficient de x^7 de cette série?

Votre réponse	Réponse correcte
2*4^2/(16^4)	

Note: 3/3.0

(iii) Quel est le rayon de convergence de la série pour $f'(x)$?
Écrire la lettre i si le rayon est infini.

Votre réponse	Réponse correcte
4	

Note: 1/1.0

(iv) Calculez le développement en série d'une primitive $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ de $f(x)$ autour de $x = 0$.
Quel est le coefficient de x^7 ?

Votre réponse	Réponse correcte
3/(7*16^3)	

Note: 3/3.0

(v) Quel est le rayon de convergence de la série pour $\int f(x)\, \mathrm{d}x$?
Écrire la lettre i si le rayon est infini.

Votre réponse	Réponse correcte

4

Note: 1/1.0

Résultat final: 1.0×2/10 + 1.0×3/10 + 1.0×1/10 + 1.0×3/10 + 1.0×1/10 = 20% + 30% + 10% + 30% + 10%

Commentaire:

(i) Le terme général de cette série est

$$a_n = \frac{n\,x^{2n}}{16^n}.$$

On trouve

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)\ |x|^{2(n+1)}}{16^{n+1}} \cdot \frac{16^n}{n\,|x|^{2n}}$$

$$= \frac{|x|^2}{16} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{|x|^2}{16}\,(1 + \frac{1}{n})$$

$$\to \frac{|x|^2}{16}$$

lorsque $n \to \infty$. En vertu du test du quotient la série converge si $\frac{|x|^2}{16} < 1$ et diverge si $\frac{|x|^2}{16} > 1$. Donc, son rayon de convergence est $R = 16^{1/2} = 4$.

(ii) et (iii) Suivant la théorie vue au cours, la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ est donnée par

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{n\,x^{2n}}{16^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2\ x^{2n-1}}{16^n}$$

pour tout x avec $|x| < 4$ et le rayon de convergence de cette série est 4 .

Le coefficient de x^7 est $2 \cdot 4^2 \ / \ 16^4$.

(iv) et (v) Suivant la théorie vue au cours, la primitive $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ de $f(x)$ est donnée par

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n\,x^{2n}}{16^n}\ \mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,x^{2n+1}}{16^n\ (2n+1)}$$

pour tout x avec $|x| < 4$ et le rayon de convergence de cette série est 4 .

Le coefficient de x^7 est $\frac{3}{16^3 \cdot 7}$.

Question 6: *Résultat 2/2*

Développez la fonction

$$\ln(1 + 27x^3)$$

en série de puissances autour de $x = 0$.

(I)

Quel est le rayon de convergence de cette série? Correcte

Votre réponse: 1/3

(II)

Vrai ou Faux? La série représente la fonction pour tout x à l'intérieur de son domaine de convergence. Correcte

Votre réponse: True

(III)

Quel est le coefficient de x^{15} dans cette série? Correcte

Votre réponse: 27^5/5

Commentaires:

On sait que

$$\ln(1 - y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{y^n}{n}$$

pour tout y avec $|y| < 1$ et que le rayon de convergence de la série est $R = 1$.

En posant $y = -27x^3$, on en déduit que

$$\ln(1 + 27x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-27x^3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 27^n\, x^{3n}}{n}$$

pour tout x tel que $\left|27x^3\right| < 1$, c'est-à-dire tel que

$$|x| < \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}.$$

De plus, lorsque $\left|27x^3\right| > 1$, c'est-à-dire pour $|x| > 1\,/\,3$, la série diverge.

Donc le rayon de convergence de la série est $R = 1\,/\,3$ et la série représente la fonction à l'intérieur de son intervalle de convergence.

Enfin, on a $15 = 3n$ pour $n = 5$. Donc le coefficient cherché est $\dfrac{(-1)^6\, 27^5}{5} = \dfrac{27^5}{5}$.