Devoir 11 (hiver 2018)

[PRINT]

MAT1722 -- Hiver 2018, Devoir 11 (hiver 2018)
Francisco Cabrera, 4/4/18 at 4:21:21 PM EDT

Question 1: *Score 2/2*

La largeur x , la longueur y et la hauteur z d'une boîte rectangulaire fermée sont mesurées en centimètres et varient dans le temps.
À un moment donné, les dimensions de cette boîte sont
$x = 30$, $y = 90$ et $z = 30$,
tandis que x croît de 4 cm/s, y croît de 2 cm/s et z décroît de 4 cm/s.
Déterminer le taux de variation de la surface de la boîte à cet instant.

Réponse:

Your response	Correct response
240	

Grade: 1/1.0

$cm^2 \, / \, s$.
Arrondissez à l'entier le plus proche.

Total grade: 1.0×1/1 = 100%
Comment:

La surface de la boîte est

$$S = 2xy + 2yz + 2xz \; .$$

Donc,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= 2\,(y+z)\ \frac{dx}{dt} + 2\,(x+z)\ \frac{dy}{dt} + 2\,(x+y)\ \frac{dz}{dt}.$$

À l'instant donné, le taux de variation de la surface est donc

$$\frac{dS}{dt} = 2\,(90+30)\cdot 4 + 2\,(30+30)\cdot 2 + 2\,(30+90)\,(-4)$$

$$= 240 \; .$$

Question 2: *Score 2/2*

Un plan est chauffé de manière inégale. Les coordonnées (x, y) des points de ce plan sont mesurées en centimètres et la température $T(x, y)$ au point (x, y) est mesurée en degrés Celcius.
Un insecte se promène sur ce plan et sa position après t secondes est donnée par
$x = \sqrt{10+3t}$ et $y = 1 + t$.

Sachant que la température sur le plan satisfait
$T\prime_x\ (4, 3) = 2$ et $T\prime_y\ (4, 3) = 3$,
à quel taux croît la température le long de la trajectoire de l'insecte au temps $t = 2$?

$\frac{dT}{dt}\ =$

Your response	Correct response
15/4	

Grade: 1/1.0

cm/s
Donnez la réponse exacte.

Total grade: 1.0×1/1 = 100%
Comment:

Le long de la trajectoire de l'insecte, la température T devient une fonction du temps t, et on a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= T\prime_x\ (x, y)\ \frac{d}{dt}\ (\sqrt{10+3t}) + T\prime_y\ (x, y)\ \frac{d}{dt}\ (1+t)$$

$$= T\prime_x\ (x, y)\ \frac{3}{2\ \sqrt{10+3t}} + T\prime_y\ (x, y)\ .$$

Au temps $t = 2$, on a :
$x = \sqrt{10 + 3 \cdot 2} = 4$ et $y = 1 + 2 = 3$.

Donc,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=2} = T\prime_x\ (4, 3)\ \frac{3}{2\ \sqrt{10+3\cdot 2}} + T\prime_y\ (4, 3)$$

$$= 2\ \frac{3}{2\cdot 4} + 3$$

$$= 15/4\ .$$

Question 3: *Score 1/2*

L'équation

$$4z^3 = \ln(e^{4z} + 2xy)$$

définit implicitement z comme fonction de x et de y au voisinage du point où $x = 2$, $y = 0$ et $z = 1$.
Déterminer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point.

$\frac{\partial z}{\partial x} =$

Your response	Correct response
0	**0**

Grade: 1/1.0

$\frac{\partial z}{\partial y} =$

Your response	Correct response
1/2	**Correct Answer not defined**

Grade: 0/1.0

Inscrivez les valeurs exactes.

Total grade: 1.0×1/2 + 0.0×1/2 = 50% + 0%
Comment:

En appliquant $\frac{\partial}{\partial x}$ aux deux membres de l'équation, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(4z^3) = \frac{\partial}{\partial x}\,\ln(e^{4z} + 2xy)$$

$$\Rightarrow \qquad 12z^2\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^{4z} + 2xy}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(e^{4z} + 2xy)$$

$$= \frac{1}{e^{4z} + 2xy}\,\left(4e^{4z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\right)\ .$$

Plutôt que de résoudre pour $\frac{\partial z}{\partial x}$, on peut simplement substituer les valeurs de x , y et z au point donné. On obtient ainsi

$$12\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^4}\,\left(4e^4\,\frac{\partial z}{\partial x} + 0\right) = 4\,\frac{\partial z}{\partial x}\ .$$

Donc, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

De même, en appliquant $\frac{\partial}{\partial y}$ aux deux membres de l'équation, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(4z^3) = \frac{\partial}{\partial y}\,\ln(e^{4z} + 2xy)$$

$$\Rightarrow \qquad 12z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^{4z} + 2xy}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(e^{4z} + 2xy)$$

$$= \frac{1}{e^{4z} + 2xy} \, (4e^{4z} \, \frac{\partial z}{\partial y} + 2x) \ .$$

Au point donné, on a donc

$$12 \, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^4} \, (4e^4 \, \frac{\partial z}{\partial y} + 4) = 4 \, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{4}{e^4}$$

et par suite

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4e^{-4}}{12 - 4} = (1/2) \, e^{-4} \ .$$

Question 4: *Score 2/2*

On considère la fonction

$$f \ (x, y, z) = 3xy + 3yz + 2xz \ .$$

(a) Dans quelle direction $\vec{u}$ le taux de variation de f au point $(x, y, z) = (\text{-}1, 0, 2)$ est-il maximal?

$\vec{u} =($

Your response	Correct response
0.74	

Grade: 1/1.0

,

Your response	Correct response
0.56	

Grade: 1/1.0

,

Your response	Correct response
-0.37	

Grade: 1/1.0

)

Le vecteur $\vec{u}$ doit être unitaire. Arrondissez chacune de ses coordonnées à deux décimales près.

Total grade: 1.0×1/3 + 1.0×1/3 + 1.0×1/3 = 33% + 33% + 33%

(b) Quel est le taux maximal de variation de f au point $(\text{-}1, 0, 2)$?

Réponse:

Your response	Correct response
5.39	

Grade: 1/1.0

Arrondissez la valeur à deux décimales près.

Total grade: 1.0×1/1 = 100%

Comments:

Le taux de variation est maximal dans la direction du gradient au point $(-1, 0, 2)$. On a

$$\nabla f\ (x, y, z) = (3y + 2z\ , 3x + 3z\ , 3y + 2x)\ .$$

Donc,

$$\nabla f\ (-1, 0, 2) = (4, 3, -2)\ .$$

Le taux de variation maximal de f au point $(-1, 0, 2)$ est

$$\left\| \nabla f\ (-1, 0, 2)\ \right\| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = 5.385$$

et la direction dans laquelle il est atteint est

$$\vec{u} = \frac{\nabla f\ (-1, 0, 2)}{\|\ \nabla f\ (-1, 0, 2)\ \|} = (0.743, 0.557, -0.371)\ .$$

Question 5: *Score 2/2*

Calculer la dérivée de la fonction

$$g\,(s, t) = s^4\ e^{2t}$$

au point $(s, t) = (2, 0)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = (1, 1)$.

$g\prime_{\vec{v}}\ (2, 0)\ =$

Your response	Correct response
45.25	

Grade: 1/1.0

Donner la valeur à deux décimales près.

Total grade: 1.0×1/1 = 100%

Comment:

On trouve

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 4s^3\ e^{2t}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2s^4\ e^{2t}\ .$$

Donc, au point $(s, t) = (2, 0)$, on obtient

$$\nabla g\,(2, 0) = (4 \cdot 2^3, 2 \cdot 2^4) = (32, 32)\ .$$

Le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$ est

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}\ (1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1, 1)\ .$$

Donc,

$$g\prime_{\vec{v}}\ (2, 0) = \ \nabla g\,(2, 0) \cdot \vec{u} = \frac{(32) \cdot (1) + (32) \cdot (1)}{\sqrt{2}} = 45.255\ .$$