Solutions: Examen de mi-session 9 février 8h30

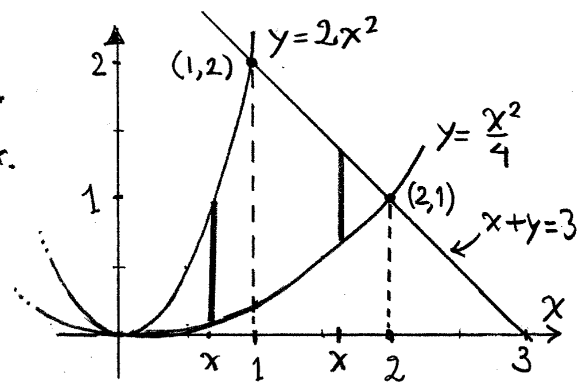
1. [5 points] Représentez la région du plan délimitée par les courbes $y = x^2/4$, $y = 2x^2$ et $x + y = 3$ avec $x \geq 0$, puis calculez-en l'aire.

A) 1/3   B) 1/2   C) 2/3   D) 1   E) 4/3 $\boxed{\text{F)}}$ 3/2

Solution. Dans le demi-plan $x \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ x+y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2/4 \\ x + \frac{x^2}{4} = 3 \end{cases} \iff (x,y) = (2,1)$$

et
$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ x+y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x^2 \\ 2x^2 + x = 3 \end{cases} \iff (x,y) = (1,2)$$



On découpe la région en bandes verticales minces d'épaisseur Δx.

Pour $0 \leq x \leq 1$:

frontière inf. $y = \frac{x^2}{4}$

frontière sup. $y = 2x^2$

$\Rightarrow$ aire d'une bande $\cong \frac{7}{4}x^2 \Delta x$

Pour $1 \leq x \leq 2$:

frontière inf. $y = \frac{x^2}{4}$

frontière sup. $x + y = 3$

$\Rightarrow$ aire d'une bande $\cong \left((3-x) - \frac{x^2}{4}\right)\Delta x$

$$\Rightarrow \text{Aire} = \int_0^1 \frac{7}{4}x^2 dx + \int_1^2 \left(3 - x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[\frac{7}{12}x^3\right|_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right|_1^2$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{11}{12} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

2. [2 points] Un réservoir mesure 5 m de haut. On note $A(x)$ l'aire de sa section horizontale à la hauteur x mesurée depuis le fond du réservoir. Si le réservoir est plein d'eau, laquelle des intégrales ci-dessous représente le travail requis pour pomper toute cette eau au sommet du réservoir?

A) $\displaystyle\int_0^3 9800(3-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ B) $\displaystyle\int_0^3 9800(5-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ C) $\displaystyle\int_0^3 9800(7-x)A(x)\,\mathrm{d}x$

D) $\displaystyle\int_0^5 9800(3-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ $\boxed{\text{E)}}$ $\displaystyle\int_0^5 9800(5-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ F) $\displaystyle\int_0^7 9800(7-x)A(x)\,\mathrm{d}x$

3. [2 points] Une fonction $f(x)$ est continue sur $[1,\infty)$ et satisfait $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x^{3/2}}$ pour tout $x \geq 1$. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$?

$\boxed{\text{A)}}$ Elle est convergente et est $\leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 4$

B) Elle est convergente et est $\leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 8$

C) Elle est convergente et est $\geq \displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 4$

D) Elle est convergente et est $\geq \displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 8$

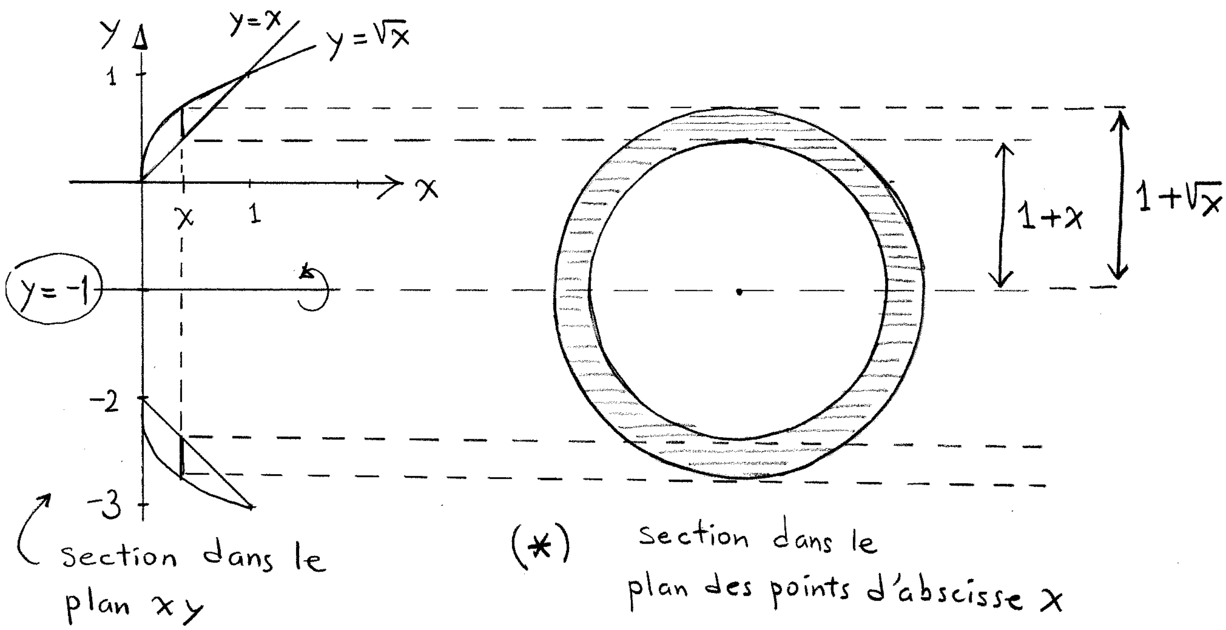
E) Elle est divergente.

F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

4. [5 points] On veut calculer le volume du solide de révolution $\mathcal{S}$ obtenu par rotation autour de la droite horizontale $y = -1$ de la région $\mathcal{R}$ du plan délimitée par les courbes

$$y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y = x.$$

(i) Dessinez cette région $\mathcal{R}$, la trace de $\mathcal{S}$ dans le plan xy, et l'anneau de section du solide $\mathcal{S}$ par le plan des points d'abscisse x générale, avec ses dimensions. Utilisez la présentation apprise en classe et n'oubliez pas les échelles sur les axes de coordonnées.



(ii) Quels sont le rayon intérieur r_i, le rayon extérieur r_e et l'aire $A(x)$ de cet anneau?

Réponses: $r_i \;=\; 1 + x \qquad\qquad r_e \;=\; 1 + \sqrt{x}$

$$A(x) \;=\; \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi\left((1+\sqrt{x})^2 - (1+x)^2\right) = \pi(2\sqrt{x} - x - x^2)$$

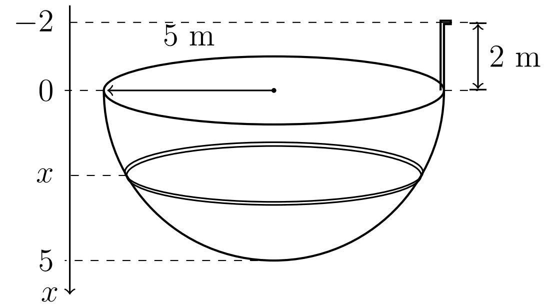
(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

$$\operatorname{vol}(\mathcal{S}) = \int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (2\sqrt{x} - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{\pi}{2} \cong 1.57$$

5. [5 points] Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 5 m de rayon, ouvert vers le haut comme le montre la figure ci-contre.

Il est rempli d'eau et on veut pomper toute cette eau à 2 m au-dessus du réservoir.

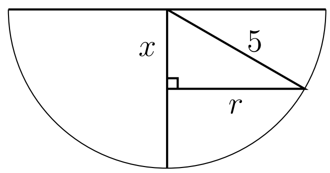
On note x la profondeur en mètres mesurée **à partir du dessus du réservoir** (voir le dessin).



(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les profondeurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x$ où r = rayon à la profondeur x

Coupe du réservoir:



le théorème de Pythagore donne:

$$r = \sqrt{5^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V \cong \pi(25 - x^2)\Delta x}$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, et que $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Réponse:
$$\begin{aligned} \Delta W &\cong (\text{poids de la couche}) \times (\text{hauteur à pomper}) \\ &= (9.8 \times 1000 \times \Delta V) \times (x + 2) \\ &= 9800\Big(\pi(25 - x^2)\Delta x\Big)(x + 2) = \boxed{9800\pi(25 - x^2)(x + 2)\Delta x}. \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau à 2 m au-dessus du réservoir? **Écrire seulement l'intégrale.** Ce n'est pas nécessaire de la calculer.

Réponse: $W = \displaystyle\int_0^5 9800\pi(25 - x^2)(x + 2)\,\mathrm{d}x$

6. [4 points] Pourquoi $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ est-elle une intégrale impropre?
Si elle est convergente, calculez sa valeur. Sinon, justifiez pourquoi elle est divergente.

Solution. L'intégrale est impropre car la fonction $\dfrac{x}{x^2-9} = \dfrac{x}{(x-3)(x+3)}$ n'est pas définie au point $x = 3$ de l'intervalle d'intégration $[0, 5]$. On a

$$\int_0^5 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x + \int_3^5 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$$

pourvu que les deux intégrales de droite convergent. En posant $u = x^2 - 9$, on trouve

$$\int \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C.$$

Donc

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 3^-}\frac{1}{2}(\ln|t^2-9| - \ln(9)) = -\infty.$$

Comme cette intégrale est divergente, l'intégrale donnée est elle aussi divergente.

7. [2 points] En utilisant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.1$ estimez $y(1.2)$, où y représente la solution de l'équation différentielle à valeur initiale $y' = 2x + y^2,\ y(1) = 1\,.$

$\boxed{\text{A.}}$ 1.689 B. 1.701 C. 1.713 D. 1.725 E. 1.737 F. 1.749

Ici $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_{i+1} = x_i + 0.1$, $y_{i+1} = y_i + (2x_i + y_i)0.1$ $(i \geq 0)$.

$\Rightarrow$ $x_1 = 1.1$, $y(1.1) \cong y_1 = y_0 + (2x_0 + y_0^2)h = 1 + 3 \times 0.1 = 1.3$

$x_2 = 1.2$, $y(1.2) \cong y_2 = y_1 + (2x_1 + y_1^2)h = 1.3 + (2 \times 1.1 + 1.3^2) \times 0.1$

$= 1.689.$

8. [5 points] Résoudre le problème à valeur initiale $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{x^2 y}$, $y(1) = -1$

Solution: En séparant les variables, on trouve

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{3}{x} + C \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2C - \frac{6}{x}}.$$

Comme $y(1) = -1$, on en déduit que $-1 = \pm\sqrt{2C - 6}$, donc $2C = 7$ puis $\boxed{y = -\sqrt{7 - \frac{6}{x}}}$ (avec le signe moins).