

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2}$  au point  $(2, 1)$  pour estimer  $f(1.8, 0.9)$ . La réponse est arrondie à trois décimales après le point.

- A) 2.543     B) 2.567    C) 2.600    D) 2.621    E) 2.627    F) 2.633

L'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(2, 1)$

est  $L(x, y) = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x-2) + f'_y(2, 1)(y-1)$ .

On a  $f'_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot 3x^2$  et  $f'_y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot 2y$ .

$\Rightarrow f(2, 1) = \sqrt{9} = 3$ ,  $f'_x(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 = 2$  et  $f'_y(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow L(x, y) = 3 + 2(x-2) + \frac{1}{3}(y-1)$

$\Rightarrow f(1.8, 0.9) \approx L(1.8, 0.9) = 3 + 2 \cdot (-0.2) + \frac{1}{3}(-0.1) = 3 - 0.4 - 0.0333\dots$   
 $= 2.5666\dots$

2. (Bonus: 2 points) Le rayon  $r$  d'un cône de sable (à sa base) et sa hauteur  $h$  varient en fonction du temps  $t$  au fur et à mesure qu'on y ajoute du sable. Sachant qu'au temps  $t = 3$ , on a

$$r = 5, \quad h = 6, \quad \frac{dr}{dt} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = 3,$$

déterminez le taux de variation  $\frac{dV}{dt}$  du volume  $V$  du cône à ce moment-là. On rappelle que le volume d'un cône est  $V = (1/3)\pi r^2 h$ .

- A)  $30\pi$     B)  $36\pi$     C)  $42\pi$     D)  $50\pi$      E)  $65\pi$     F)  $72\pi$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times 30 \times 2 + \frac{\pi}{3} \times 25 \times 3 = 40\pi + 25\pi = 65\pi$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$  au point  $(2, 1)$  pour estimer  $f(2.06, 0.92)$ .

- A) 0.075       B) 0.08      C) 0.083      D) 0.087      E) 0.09      F) 0.093

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 4}$$

$$f(2, 1) = \ln(1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{2}{1} = 2$$

⇒ L'approximation linéaire au point  $(2, 1)$  est

$$L(x, y) = 0 + 4(x-2) + 2(y-1)$$

$$\Rightarrow f(2.06, 0.92) \approx 4(2.06-2) + 2(0.92-1) = 0.24 - 0.16 = 0.08$$

2. (Bonus: 2 points) Le rayon  $r$  et la hauteur  $h$  d'une boîte cylindrique varient en fonction du temps  $t$ . Soit  $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$  sa surface. Sachant qu'au temps  $t = 2$ , on a

$$r = 10 \text{ cm}, \quad h = 30 \text{ cm}, \quad \frac{dr}{dt} = 2 \text{ cm/s} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = 1 \text{ cm/s},$$

déterminez le taux de variation  $\frac{dS}{dt}$  de sa surface  $S$  du cylindre à ce moment-là.

- A)  $180\pi$       B)  $200\pi$        C)  $220\pi$       D)  $240\pi$       E)  $260\pi$       F)  $280\pi$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

$$= (2\pi h + 4\pi r) \frac{dr}{dt} + 2\pi r \frac{dh}{dt}$$

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=2} = (2\pi \times 30 + 4\pi \times 10) \times 2 + 2\pi \times 10 \times 1 = \boxed{220\pi}$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \frac{x}{xy+2}$  au point  $(1, 3)$  pour estimer  $f(0.8, 3.1)$ .

A) 0.178    B) 0.1786     C) 0.18    D) 0.1823    E) 0.184    F) 0.1856

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1(xy+2) - xy}{(xy+2)^2} = \frac{2}{(xy+2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = \frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(xy+2)^2} \cdot x = -\frac{x^2}{(xy+2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = -\frac{1}{25}$$

L'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(1, 3)$  est

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3)(y-3) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(x-1) - \frac{1}{25}(y-3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(0.8, 3.1) \cong L(0.8, 3.1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(-0.2) - \frac{1}{25}(0.1) = \frac{1}{5} - \frac{0.5}{25} = \boxed{0.18}$$

2. (Bonus: 2 points)

On suppose que  $g(t, u) = f(te^u, 2t + u + 1)$  où  $f(x, y)$  est une fonction différentiable de  $x$  et de  $y$ . Utilisez la table des valeurs ci-contre pour calculer  $g'_u(1, 0)$ .

	$f$	$g$	$f'_x$	$f'_y$
$(1, 0)$	6	-1	2	3
$(1, 1)$	1	2	7	5
$(1, 3)$	4	0	5	1

A) -11    B) -5     C) 6    D) 13    E) 15    F) 35

**Solution:** La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(te^u, 2t + u + 1) \frac{\partial}{\partial u}(te^u) + \frac{\partial f}{\partial y}(te^u, 2t + u + 1) \frac{\partial}{\partial u}(2t + u + 1) \\ &= te^u f'_x(te^u, 2t + u + 1) + f'_y(te^u, 2t + u + 1). \end{aligned}$$

Au point  $(t, u) = (1, 0)$ , on a  $(te^u, 2t + u + 1) = (e^0, 3) = (1, 3)$ , donc

$$g'_u(1, 0) = f'_x(1, 3) + f'_y(1, 3) = 5 + 1 = \boxed{6}.$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \ln(3x^2 + 2xy - 6)$  au point  $(1, 2)$  pour estimer  $f(1.01, 1.98)$ .

A) 0.02    B) 0.04    C) 0.052     D) 0.06    E) 0.08    F) 1.03

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3x^2 + 2xy - 6} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy - 6) = \frac{6x + 2y}{3x^2 + 2xy - 6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{3x^2 + 2xy - 6} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy - 6) = \frac{2x}{3x^2 + 2xy - 6}$$

$$\nabla f(1, 2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right) = \left( \frac{10}{1}, \frac{2}{1} \right) = (10, 2)$$

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y-2) \\ &= \ln(1) + 10(x-1) + 2(y-2) = 10(x-1) + 2(y-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1.01, 1.98) &\cong L(1.01, 1.98) = 10(1.01-1) + 2(1.98-2) = 10 \cdot 0.01 + 2 \cdot (-0.02) \\ &= \boxed{0.06} \end{aligned}$$

2. (Bonus: 2 points)

On suppose que  $g(t, u) = f(te^u, 2t + u + 1)$  où  $f(x, y)$  est une fonction différentiable de  $x$  et de  $y$ . Utilisez la table des valeurs ci-contre pour calculer  $g'_t(1, 0)$ .

	$f$	$g$	$f'_x$	$f'_y$
$(1, 0)$	6	-1	2	3
$(1, 1)$	1	2	7	5
$(1, 3)$	4	0	5	1

A) -13    B) -4    C) 0    D) 3     E) 7    F) 25

**Solution:** La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(te^u, 2t + u + 1) \frac{\partial}{\partial t}(te^u) + \frac{\partial f}{\partial y}(te^u, 2t + u + 1) \frac{\partial}{\partial t}(2t + u + 1) \\ &= e^u f'_x(te^u, 2t + u + 1) + 2f'_y(te^u, 2t + u + 1). \end{aligned}$$

Au point  $(t, u) = (1, 0)$ , on a  $(te^u, 2t + u + 1) = (e^0, 3) = (1, 3)$ , donc

$$g'_t(1, 0) = e^0 f'_x(1, 3) + 2f'_y(1, 3) = 5 + 2 = \boxed{7}$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}$  au point  $(2, 10)$  pour estimer  $f(2.01, 9.98)$ .

- A) 5.01     B) 5.015     C) 5.018     D) 5.022     E) 5.025     F) 5.03

**Solution.** On calcule d'abord les dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + y}{2\sqrt{x^2 + xy + 1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + xy + 1}}.$$

Au point  $(x, y) = (2, 10)$ , on trouve

$$f(2, 10) = \sqrt{4 + 20 + 1} = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 10) = \frac{7}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 10) = \frac{1}{5}.$$

Donc l'approximation linéaire de  $f$  en ce point est

$$L(x, y) = 5 + \frac{7}{5}(x - 2) + \frac{1}{5}(y - 10),$$

et  $f(2.01, 9.98) \cong L(2.01, 9.98) \cong 5 + 1.4 \times 0.01 + 0.2 \times (-0.02) = \boxed{5.01}$ .

2. (Bonus: 2 points) Étant donné  $w = \ln(3x^2 + 2y^2 + z^2)$ ,  $x = \cos(s)$ ,  $y = \frac{s}{\pi t}$  et  $z = t$ , utilisez la règle de dérivation en chaîne pour calculer  $\frac{\partial w}{\partial t}$  au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ .

- A)  $-3/4$      B)  $-1/3$     C) 0    D)  $3/2$     E)  $5/3$     F) 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{6x}{3x^2 + 2y^2 + z^2} \cdot 0 + \frac{4y}{3x^2 + 2y^2 + z^2} \cdot \left(-\frac{s}{\pi t^2}\right) + \frac{2z}{3x^2 + 2y^2 + z^2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3x^2 + 2y^2 + z^2} \left(-\frac{4sy}{\pi t^2} + 2z\right) \end{aligned}$$

Au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ , on a  $x = \cos(\pi) = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$

donc  $\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6}(-4 + 2) = -\frac{1}{3}}$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{2 + 2x^2 - y^4}$  au point  $(x, y) = (2, 1)$  pour estimer  $f(2.05, 1.01)$ .

- A) 2.932    B) 2.96    C) 3     D) 3.06    E) 3.078    F) 3.1

$$f(2, 1) = \sqrt{2 + 8 - 1} = 3$$

$$f'_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 + 2x^2 - y^4}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2 + 2x^2 - y^4}} \Rightarrow f'_x(2, 1) = \frac{4}{3}$$

$$f'_y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 + 2x^2 - y^4}} (-4y^3) = \frac{-2y^3}{\sqrt{2 + 2x^2 - y^4}} \Rightarrow f'_y(2, 1) = -\frac{2}{3}$$

approx. linéaire :  $L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) - \frac{2}{3}(y-1)$

$$\Rightarrow f(2.05, 1.01) \approx L(2.05, 1.01) = 3 + \frac{4}{3} \cdot 0.05 - \frac{2}{3} \cdot 0.01 = 3 + \frac{0.18}{3} = \boxed{3.06}$$

2. (Bonus: 2 points) Un plan est chauffé de manière inégale. Les coordonnées  $(x, y)$  des points de ce plan sont mesurées en centimètres et la température  $T(x, y)$  au point  $(x, y)$  est mesurée en degrés Celcius. Un insecte se promène sur ce plan et sa position après  $t$  secondes est donnée par

$$x = \sqrt{1 + 4t} \quad \text{et} \quad y = 2 + t.$$

Sachant que la température sur le plan satisfait  $T'_x(3, 4) = 2$  et  $T'_y(3, 4) = -1$ , à quel taux croît la température le long de la trajectoire de l'insecte au temps  $t = 2$  ?

- A)  $-\frac{5}{3}$  °C/s    B)  $-\frac{1}{2}$  °C/s    C)  $-1$  °C/s     D)  $\frac{1}{3}$  °C/s    E)  $\frac{3}{2}$  °C/s    F)  $\frac{4}{3}$  °C/s

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \cdot 4 + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot 1 \end{aligned}$$

Au temps  $t = 2$ , on a  $x = \sqrt{1 + 8} = 3$  et  $y = 4$ , donc

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=2} = T'_x(3, 4) \cdot \frac{2}{3} + T'_y(3, 4) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = (x^2y^2 + 4)^{1/3}$  au point  $(x, y) = (2, 1)$  pour estimer  $f(1.98, 1.03)$ . La réponse est arrondie à trois décimales après le point.

- A) 1.992    B) 1.997    C) 2.002    D) 2.007    E) 2.01    **F) 2.013**

$$\text{Solution: } f'_x = \frac{1}{3}(x^2y^2+4)^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2+4) = \frac{2xy^2}{3(x^2y^2+4)^{2/3}}$$

$$f'_y = \frac{1}{3}(x^2y^2+4)^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2+4) = \frac{2x^2y}{3(x^2y^2+4)^{2/3}}$$

$$\Rightarrow f'_x(2,1) = \frac{4}{3(8)^{2/3}} = \frac{1}{3}, \quad f'_y(2,1) = \frac{8}{3 \cdot 8^{2/3}} = \frac{2}{3}, \quad f(2,1) = 8^{1/3} = 2$$

Donc l'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(2, 1)$  est

$$L(x, y) = 2 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-1)$$

$$\Rightarrow f(1.98, 1.03) \cong 2 + \frac{1}{3}(1.98-2) + \frac{2}{3}(1.03-1) = 2 - \frac{0.02}{3} + 0.02 \cong \boxed{2.013}$$

2. (Bonus: 2 points)

On suppose que  $g(t, u) = f(t^2 - 3u, tu - 1)$  où  $f(x, y)$  est une fonction différentiable de  $x$  et de  $y$ . Utilisez la table des valeurs ci-contre pour calculer  $g'_t(2, 1)$ .

	$f$	$g$	$f'_x$	$f'_y$
$(1, 0)$	6	-1	2	3
$(1, 1)$	1	2	7	5
$(1, 3)$	4	0	5	1

- A) -23    B) -4    C) 0    D) 13    E) 17    **F) 33**

**Solution:** La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 - 3u, tu - 1) \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - 3u) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 - 3u, tu - 1) \frac{\partial}{\partial t}(tu - 1) \\ &= 2t f'_x(t^2 - 3u, tu - 1) + u f'_y(t^2 - 3u, tu - 1). \end{aligned}$$

Au point  $(t, u) = (2, 1)$ , on a  $(t^2 - 3u, tu - 1) = (1, 1)$ , donc

$$g'_t(2, 1) = 4f'_x(1, 1) + f'_y(1, 1) = 4 \cdot 7 + 5 = \boxed{33}.$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = e^{x+2y}\sqrt{x}$  au point  $(x, y) = (4, -2)$  pour estimer  $f(4.01, -2.02)$ . La réponse est arrondie à quatre décimales après le point.

A) 1.9390    B) 1.9397    C) 1.9403    D) 1.9416    E) 1.9425    F) 1.9460

$$f'_x = e^{x+2y} \cdot \sqrt{x} + e^{x+2y} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = e^{x+2y} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$f'_y = e^{x+2y} \cdot 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$f(4, -2) = e^0 \sqrt{4} = 2.$$

$$\Rightarrow f'_x(4, -2) = e^0 \cdot \left( \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \right) = \frac{9}{4}, \quad f'_y(4, -2) = e^0 \cdot 2\sqrt{4} = 4$$

$\Rightarrow$  L'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(4, -2)$  est

$$L(x, y) = 2 + \frac{9}{4}(x-4) + 4(y-(-2)) = 2 + \frac{9}{4}(x-4) + 4(y+2)$$

$$\Rightarrow f(4.01, -2.02) \approx L(4.01, -2.02) = 2 + \frac{9}{4} \times 0.01 + 4(-0.02)$$

$$\approx 1.9425$$

2. (Bonus: 2 points) Étant donné  $w = \ln(3x^2 + 2y^2 + z^2)$ ,  $x = \cos(s)$ ,  $y = \frac{s}{\pi t}$  et  $z = t$ , utilisez la règle de dérivation en chaîne pour calculer  $\frac{\partial w}{\partial s}$  au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ .

A)  $\frac{-3\pi}{4}$     B)  $\frac{-1}{4\pi}$     C) 0    D)  $\frac{2}{3\pi}$     E)  $\frac{3\pi}{2}$     F)  $\frac{5}{3\pi}$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \frac{6x}{3x^2+2y^2+z^2} (-\sin(s)) + \frac{4y}{3x^2+2y^2+z^2} \left( \frac{1}{\pi t} \right) + \frac{2z}{3x^2+2y^2+z^2} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{3x^2+2y^2+z^2} \left( -6x \sin(s) + \frac{4y}{\pi t} \right)$$

Au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ , on a  $x = \cos(\pi) = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{6} \left( 0 + \frac{4}{\pi} \right) = \frac{2}{3\pi}$$

donc

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2}$  au point  $(2, 1)$  pour estimer  $f(1.8, 0.9)$ . La réponse est arrondie à trois décimales après le point.

- A) 2.543     B) 2.567    C) 2.600    D) 2.621    E) 2.627    F) 2.633

L'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(2, 1)$

est  $L(x, y) = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x-2) + f'_y(2, 1)(y-1)$ .

On a  $f'_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot 3x^2$  et  $f'_y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot 2y$ .

$\Rightarrow f(2, 1) = \sqrt{9} = 3$ ,  $f'_x(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 = 2$  et  $f'_y(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow L(x, y) = 3 + 2(x-2) + \frac{1}{3}(y-1)$

$\Rightarrow f(1.8, 0.9) \approx L(1.8, 0.9) = 3 + 2 \cdot (-0.2) + \frac{1}{3}(-0.1) = 3 - 0.4 - 0.0333\dots$   
 $= 2.5666\dots$

2. (Bonus: 2 points) Le rayon  $r$  d'un cône de sable (à sa base) et sa hauteur  $h$  varient en fonction du temps  $t$  au fur et à mesure qu'on y ajoute du sable. Sachant qu'au temps  $t = 3$ , on a

$$r = 5, \quad h = 6, \quad \frac{dr}{dt} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = 3,$$

déterminez le taux de variation  $\frac{dV}{dt}$  du volume  $V$  du cône à ce moment-là. On rappelle que le volume d'un cône est  $V = (1/3)\pi r^2 h$ .

- A)  $30\pi$     B)  $36\pi$     C)  $42\pi$     D)  $50\pi$      E)  $65\pi$     F)  $72\pi$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times 30 \times 2 + \frac{\pi}{3} \times 25 \times 3 = 40\pi + 25\pi = 65\pi$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \frac{x}{xy+2}$  au point  $(1, 3)$  pour estimer  $f(0.8, 3.1)$ .

- A) 0.178    B) 0.1786     C) 0.18    D) 0.1823    E) 0.184    F) 0.1856

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1(xy+2) - xy}{(xy+2)^2} = \frac{2}{(xy+2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = \frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(xy+2)^2} \cdot x = -\frac{x^2}{(xy+2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = -\frac{1}{25}$$

L'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(1, 3)$  est

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3)(y-3) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(x-1) - \frac{1}{25}(y-3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(0.8, 3.1) \cong L(0.8, 3.1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(-0.2) - \frac{1}{25}(0.1) = \frac{1}{5} - \frac{0.5}{25} = \boxed{0.18}$$

2. (Bonus: 2 points)

On suppose que  $g(t, u) = f(t^2 - 3u, tu - 1)$  où  $f(x, y)$  est une fonction différentiable de  $x$  et de  $y$ . Utilisez la table des valeurs ci-contre pour calculer  $g'_u(2, 1)$ .

	$f$	$g$	$f'_x$	$f'_y$
$(1, 0)$	6	-1	2	3
$(1, 1)$	1	2	7	5
$(1, 3)$	4	0	5	1

- A) -20     B) -11    C) 0    D) 15    E) 21    F) 25

**Solution:** La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 - 3u, tu - 1) \frac{\partial}{\partial u}(t^2 - 3u) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 - 3u, tu - 1) \frac{\partial}{\partial u}(tu - 1) \\ &= -3 f'_x(t^2 - 3u, tu - 1) + t f'_y(t^2 - 3u, tu - 1). \end{aligned}$$

Au point  $(t, u) = (2, 1)$ , on a  $(t^2 - 3u, tu - 1) = (1, 1)$ , donc

$$g'_u(2, 1) = -3 f'_x(1, 1) + 2 f'_y(1, 1) = -3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = \boxed{-11}.$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}$  au point  $(2, 10)$  pour estimer  $f(2.01, 9.98)$ .

- A) 5.01    B) 5.015    C) 5.018    D) 5.022    E) 5.025    F) 5.03

**Solution.** On calcule d'abord les dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + y}{2\sqrt{x^2 + xy + 1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + xy + 1}}.$$

Au point  $(x, y) = (2, 10)$ , on trouve

$$f(2, 10) = \sqrt{4 + 20 + 1} = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 10) = \frac{7}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 10) = \frac{1}{5}.$$

Donc l'approximation linéaire de  $f$  en ce point est

$$L(x, y) = 5 + \frac{7}{5}(x - 2) + \frac{1}{5}(y - 10),$$

et  $f(2.01, 9.98) \cong L(2.01, 9.98) \cong 5 + 1.4 \times 0.01 + 0.2 \times (-0.02) = \boxed{5.01}$ .

2. (Bonus: 2 points) Le rayon  $r$  et la hauteur  $h$  d'une boîte cylindrique varient en fonction du temps  $t$ . Soit  $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$  sa surface. Sachant qu'au temps  $t = 2$ , on a

$$r = 10 \text{ cm}, \quad h = 30 \text{ cm}, \quad \frac{dr}{dt} = 2 \text{ cm/s} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = 1 \text{ cm/s},$$

déterminez le taux de variation  $\frac{dS}{dt}$  de sa surface  $S$  du cylindre à ce moment-là.

- A)  $180\pi$     B)  $200\pi$      C)  $220\pi$     D)  $240\pi$     E)  $260\pi$     F)  $280\pi$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

$$= (2\pi h + 4\pi r) \frac{dr}{dt} + 2\pi r \frac{dh}{dt}$$

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=2} = (2\pi \times 30 + 4\pi \times 10) \cdot 2 + 2\pi \times 10 \times 1 = \boxed{220\pi}$$

1. (Réponse 2 points et démarche 3 points) Utilisez l'approximation linéaire de la fonction  $f(x, y) = (x^2y^2 + 4)^{1/3}$  au point  $(x, y) = (2, 1)$  pour estimer  $f(1.98, 1.03)$ . La réponse est arrondie à trois décimales après le point.

- A) 1.992    B) 1.997    C) 2.002    D) 2.007    E) 2.01    F) 2.013

$$\text{Solution: } f'_x = \frac{1}{3}(x^2y^2+4)^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2+4) = \frac{2xy^2}{3(x^2y^2+4)^{2/3}}$$

$$f'_y = \frac{1}{3}(x^2y^2+4)^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2+4) = \frac{2x^2y}{3(x^2y^2+4)^{2/3}}$$

$$\Rightarrow f'_x(2,1) = \frac{4}{3(8)^{2/3}} = \frac{1}{3}, \quad f'_y(2,1) = \frac{8}{3 \cdot 8^{2/3}} = \frac{2}{3}, \quad f(2,1) = 8^{1/3} = 2$$

Donc l'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au point  $(2, 1)$  est

$$L(x, y) = 2 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-1)$$

$$\Rightarrow f(1.98, 1.03) \cong 2 + \frac{1}{3}(1.98-2) + \frac{2}{3}(1.03-1) = 2 - \frac{0.02}{3} + 0.02 \cong \boxed{2.013}$$

2. (Bonus: 2 points) Étant donné  $w = \ln(3x^2 + 2y^2 + z^2)$ ,  $x = \cos(s)$ ,  $y = \frac{s}{\pi t}$  et  $z = t$ , utilisez la règle de dérivation en chaîne pour calculer  $\frac{\partial w}{\partial t}$  au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ .

- A)  $-3/4$     B)  $-1/3$     C) 0    D)  $3/2$     E)  $5/3$     F) 2

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{6x}{3x^2+2y^2+z^2} \cdot 0 + \frac{4y}{3x^2+2y^2+z^2} \cdot \left(-\frac{s}{\pi t^2}\right) + \frac{2z}{3x^2+2y^2+z^2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3x^2+2y^2+z^2} \left(-\frac{4sy}{\pi t^2} + 2z\right)$$

Au point où  $t = 1$  et  $s = \pi$ , on a  $x = \cos(\pi) = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6}(-4+2) = -\frac{1}{3}$$