Université d'Ottawa
MAT1730B Examen Partiel 1
5 Octobre 2016. Durée: 80 minutes. Professeur: Rachid Bentoumi

Version 1

Prénom:____________________

Nom:____________________

DGD 1 **DGD 2**

Ne **pas** écrire votre numéro d'étudiant sur cette première page. S'il vous plaît écrire votre numéro d'étudiant sur la deuxième page.
Prenez le temps de lire l'intégralité du document avant de commencer à écrire. Lire attentivement chaque question. Rappelez-vous que certaines questions valent plus de points que d'autres. Prenez note des questions dont vous êtes confiant que vous pouvez faire, et ensuite les traiter en premier: vous n'êtes pas tenu de procéder dans l'ordre donné.

- Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen
- Ceci est un examen à livre fermé, et aucune note de toute nature n'est autorisée. L'utilisation des cellulaires, téléphones, téléavertisseurs ou tout stockage de texte ou dispositif de communication **n'est pas autorisée.**
- Seules les calculatrices approuvées par la Faculté seront permises lors de cet examen, ces calculatrices sont (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).
- Les Questions 1–10 sont des questions à choix multiples.Vous devez écrire vos réponses dans les cases en haut de la page 2. Chacune de ces questions vaut 1 point.
- Les Questions 11 et 12 sont des questions à développement.

  La bonne réponse doit être justifiée, écrit lisiblement et logiquement: vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est correcte. Répondez à ces questions dans l'espace réservé. Utilisez le verso des pages pour vos calculs supplémentaires si nécessaire.
- Ainsi il est possible de vérifier votre travail.
- S'il vous plaît ne pas détacher les pages.
- Bonne chance!

Numéro d'étudiant:____________________, Total: 30 sur 30

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse de 1–10	B	B	E	B	E	C	E	D	B	C	X	X
Points	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	6

Question 1. Si $f(x) = 4x - 2$ et $g(x) = -5x + 9$ quel est $(f \circ g)(1)$?

$g(1) = 4$

$f(g(1)) = f(4) = 14$

Réponse: A: -14; B: 14; C: -1; D: 1; E: 0.

Question 2. Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3}$$

$x^2 - 3 \neq 0$

$x^2 \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

Réponse:
A: tous les nombres réels sauf -1; B: tous les nombres réels sauf $\pm\sqrt{3}$; C: tous les nombres réels tels que $|x| > 3$; D: tous les nombres réels sauf ± 3; E: tous les nombres réels sauf 0

Question 3. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

$\ast$ (i) Si $a, b > 0$ alors $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
$\ast$ (ii) $\arccos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
(iii) Si $a, b > 0$ alors $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$. ✓
$\ast$ (iv) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
$\ast$ (v) $e^{x+y} = e^x + e^y$

Réponse: A: (i), (ii) and (iii); B: (ii) and (iv); C: (ii), (iii) and (v); D: (ii) and (iii) only; E: (iii) seulement.

Question 4. Trouver toutes les solutions de l'équation $|x^3 - 7| = 7$.

$$|x^3 - 7| = \begin{cases} x^3 - 7 & \text{si } x^3 \geq 7 \\ -(x^3 - 7) & \text{si } x^3 < 7 \end{cases}$$

1) si $x^3 \geq 7 \Rightarrow x^3 - 7 = 7 \Rightarrow x^3 = 14 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{14}}$

2) si $x^3 < 7 \Rightarrow -x^3 + 7 = 7 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Réponse: A: 0; B: $0, \sqrt[3]{14}$; C: $0, \pm\sqrt{7}$; D: $0, \pm\sqrt[3]{7}$; E: $0, \pm\sqrt[3]{14}$

Question 5. Trouver toutes les solutions de l'équation $\log(x+2) + \log(x+3) = \log(2)$.

Réponse: A: -4; B: $1, -4$; C: $1, 4$; D: $-1, -4$; E: -1

$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$-3 \quad -2$

$x \in]-2, \infty[$

$(x+2)(x+3) = 2$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+4)(x+1) = 0$

$x = -4 \notin]-2, \infty[$

$x = -1 \in]-2, \infty[$

Question 6. Determiner la période et l'amplitude de la fonction $f(t) = 5\pi \sin(3t)$.

Réponse:

A: amplitude 5π, période $\pi/3$.
B: amplitude 5, période $\pi/3$.
C: amplitude 5π, période $2\pi/3$.
D: amplitude 5, période $2\pi/3$.
E: amplitude 5π, période $\pi/6$.

$|A| = |5\pi| = 5\pi$, $P = \frac{2\pi}{3}$

Question 7. Si x et y sont des nombres réels non nuls, alors $\frac{5}{x} - \frac{6}{y}$ est égale à

Réponse: A: $\frac{5x+6y}{xy}$; B: $\frac{-30}{xy}$; C: $\frac{-1}{x-y}$; D: $\frac{6x-5y}{xy}$; E: $\frac{5y-6x}{xy}$;

$\frac{5}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5y - 6x}{xy}$

Question 8. Le polynôme quadratique $2x^2 + x - 6$ se factorise par

Réponse: A: $(2x+3)(x+2)$; B: $(x+3)(x-2)$; C: $(2x-2)(x+3)$; D: $(2x-3)(x+2)$;
E: $(2x+3)(x-2)$

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-6) = 49$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2 \cdot 2} = -2$

$2x^2 + x - 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2)$
$= (2x-3)(x+2)$

Question 9. Quelle est l'image de la fonction $f(x) = -4 + 2\sin(6x-5)$?

Réponse: A: $[-4,-2]$; B: $[-6,-2]$; C: $[-3,-5]$; D: $[-2,2]$; E: $[-4,2]$

$-1 \leq \sin(6x-5) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin(6x-5) \leq 2$
$-6 \leq -4 + 2\sin(6x-2) \leq -2$

Question 10. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

(i) Tout SDD a au moins un point d'équilibre. Par exemple $x_{n+1} = x_n + 1$, $\nexists\, a$; $\alpha = 1$
(ii) Tout SDD a au moins un point d'équilibre stable. Par exemple $x_{n+1} = 1.5x_n + 4$, $\nexists\, a$, $|\alpha| > 1$
(iii) Un SDD peut avoir une infinité de points d'équilibre .
(iv) Aucun SDD ne peut avoir un nombre infini de points d'équilibre stables
(v) Il existe un SDD où chaque point est un point d'équilibre.

$x_{n+1} = x_n$

Réponse: A: (i) and (iv); B: (i), (ii) and (iv); C: (iii) and (v);
D: (i), (iv) and (v); E: (iii) seulement.

Question 11. [14 points] Le lac Mono en Californie est un exemple rare d'un lac qui n'a aucun écoulement d'eau. Les affluents fournissent le lac avec 150 m^3 d'eau par jour. En raison du soleil intense, 2 % de l'eau dans le lac s'évapore par jour. Désignons par V_t le volume d'eau (en m^3) dans le lac le jour t. Le SDD pour le volume est donné par $V_{t+1} = 0.98V_t + 150$.

(a) La fonction d'itération du SDD est $f(x) = \boxed{0.98x + 150}$

$\alpha = 0.98$

$\beta = 150$

1

(b) Le point d'équilibre du SDD est $V^* = \boxed{7\,500 \text{ m}^3}$

1

$$V^* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{150}{1-0.98} = 7500$$

(c) La solution générale du SDD est $V_t = \boxed{(0.98)^t (V_0 - V^*) + V^*}$ où $V^* = 7500$

1

(d) Une année, une équipe d'experts a estimé le volume du lac à $V_0 = 5000$ m^3. Calculer le volume prévu pour les deux jours suivants.

Réponse $\boxed{V_1 = 5050 \text{ m}^3, \; V_2 = 5099 \text{ m}^3}$

1

$V_1 = 0.98(5000 - 7500) + 7500 = 5050$ $\quad V_2 = 0.98^2(5000-7500) + 7500 = 5099$

(e) Combien de jours après cette estimation prendrait-il pour voir le volume du lac croître à 80 % de la valeur du point d'équilibre?

Réponse $\boxed{t = 26 \text{ jours}}$

3

$$V_t = 0.98^t (V_0 - V^*) + V^*$$

On veut $V_t = 0.8\, V^*$

$$\Rightarrow \quad 0.98^t (V_0 - V^*) + V^* = 0.8\, V^*$$

$$\Rightarrow \quad 0.98^t (V_0 - V^*) = 0.8\, V^* - V^*$$

$$\Rightarrow \quad 0.98^t = \frac{-0.2\, V^*}{V_0 - V^*} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\frac{-0.2\, V^*}{V_0 - V^*}\right)}{\ln(0.98)} = 25,2$$

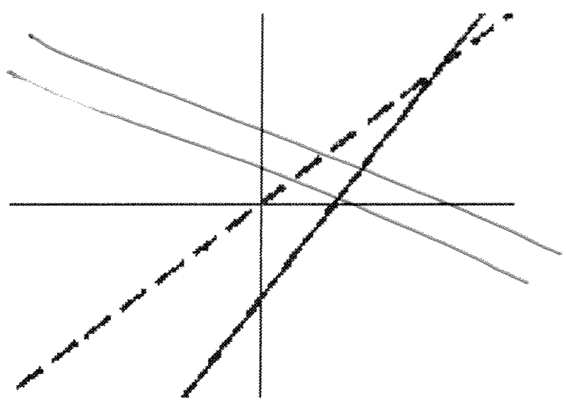
On prend $t = 26$ jours

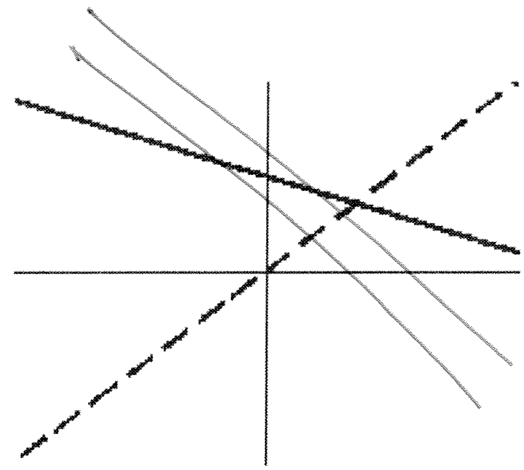
Ici, $V_0 = 5000$

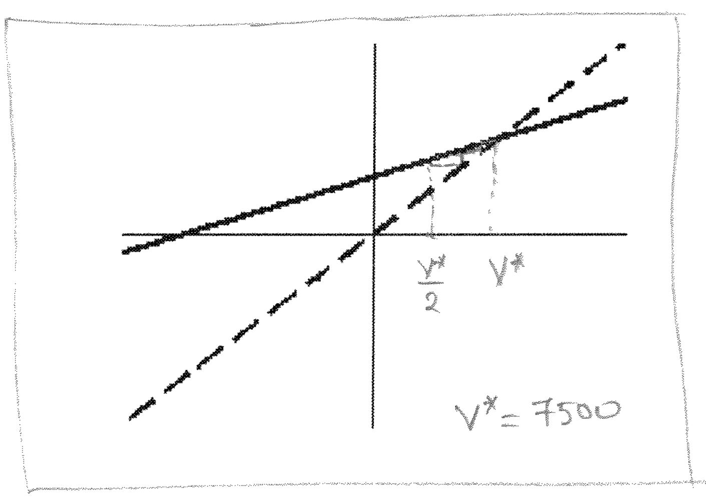
$V^* = 7500$

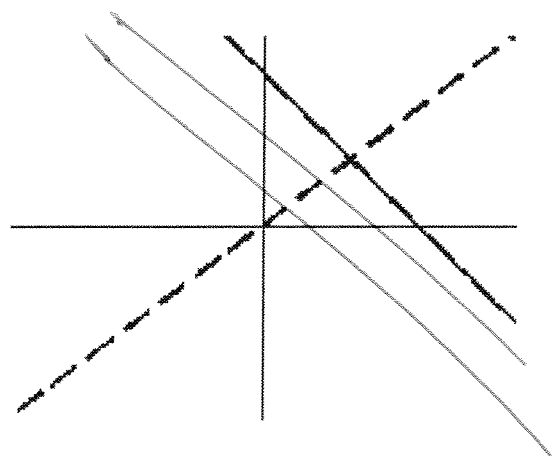
(f) Dans chacune des quatre figures en dessous des axes de coordonnées sont tracées sous forme de lignes fines solides; la diagonale est tracée comme une ligne en pointillé mince et le graphique d'une fonction est tracée comme une ligne épaisse. La fonction d'itération du SDD pour V_t correspond exactement à une de ces figures. Dans celle-ci, indiquer la valeur du point d'équilibre et construire deux itérations du graphe en forme de toiles d'araignées, à partir de la moitié de la valeur du point d'quilibre.

2









(g) Est-ce que le point d'équilibre est stable? Justifier votre réponse par **deux differentes** manières .

Le point d'équilibre est stable car

2 1.) les orbites convergent vers le point fixe

2.) $|\alpha| = |0.98| < 1$

(h) En raison du réchauffement climatique, l'évaporation quotidienne augmente à 4 %. Dans le même temps, la ville de Los Angeles est dans le besoin d'eau et veut extraire de l'eau du lac Mono pour ses besoins. Quelle est le volume d'eau que la ville peut prendre par jour si le volume total doit rester au-dessus de 3000 m^3 à long terme (i.e. le point d'équilibre doit être au moins 3000 m^3).

3

Réponse: La ville peut extraire pas plus de $\boxed{30}$ m^3 par jour.

1) L'évaporation quotidienne augmente à 4% $\Rightarrow \alpha = 1 - 0.04 = 0.9$

2) On a $V^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \Rightarrow \beta = (1-\alpha) V^* = 0.96 \cdot 3000 = 120$ m

3) Les affluents fournissent le lac avec 150 m^3/jour

4) La ville peut extraire pas plus de $150 - 120 = 30$ m^3/jour

Question 12. [6 points] Considérons le SDD

$$x_{t+1} = r x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right)^2$$

où $r, K > 0$ sont des paramètres.

(a) Trouver les points d'équilibre pour ce SDD. [Indice: certains d'entre eux peuvent dépendre de r et K.]

1

Réponse $\boxed{x^* = 0,\ x^* = K\left(1 - \sqrt{\frac{1}{r}}\right),\ x^* = K\left(1 + \sqrt{\frac{1}{r}}\right)}$

* fonction d'itération : $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2$

* Points fixes : résoudre $f(x) = x \iff rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2 = x$

$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2 - x = 0 \Rightarrow x\left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $r\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2 = 1$

$x = 0$ ou $1 - \frac{x}{K} = \pm\sqrt{\frac{1}{r}} \Rightarrow x^* = 0$ ou $x^* = K\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{r}}\right)$

(b) La figure ci-dessous montre la fonction d'itération de ce SDD pour le paramètre $r = 3$ et la droite $y = x$. Quelle est la valeur de K utilisée sur la figure?

1

Réponse: $K = \boxed{10}$

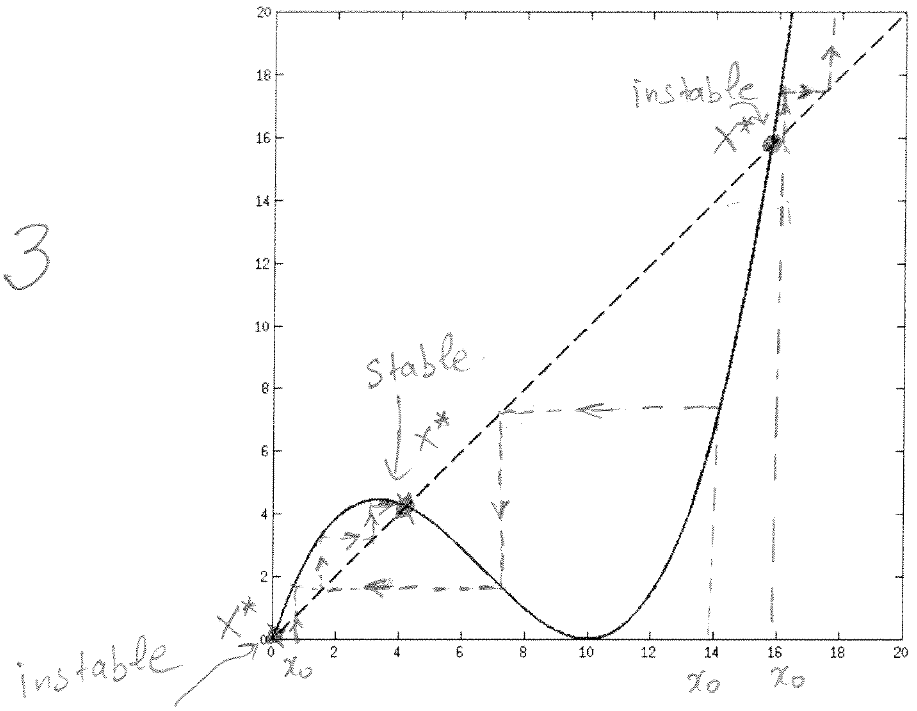
$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ $\quad f(10) = 0 \Rightarrow$

$f(10) = 3 \cdot 10\left(1 - \frac{10}{K}\right) = 0 \Rightarrow K = 10$

(c) Sur la figure, indiquer tous les points d'équilibre et déterminer leur stabilité.

3 points d'équilibre

3



(d) Donner l'expression de la fonction d'itération du SDD à deux étape $x_{t+2} = g(x_t)$. [Ne pas simplifier votre réponse.]

Réponse: $g(x) = \boxed{r^2\left(x\left(1-\frac{x}{K}\right)^2\right)\left(1-\frac{rx}{K}\left(1-\frac{x}{K}\right)^2\right)^2}$

On a:

$$x_{t+1} = r x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right)^2$$

1

$$\Rightarrow x_{t+2} = r x_{t+1}\left(1 - \frac{x_{t+1}}{K}\right)^2$$

$$= r\left(r x_t\left(1 - \frac{x_t}{K}\right)^2\right)\left(1 - \frac{r x_t\left(1 - \frac{x_t}{K}\right)^2}{K}\right)^2$$

$$g(x) = r^2\left(x\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2\right)\left(1 - \frac{r x}{K}\left(1 - \frac{x}{K}\right)^2\right)^2$$