



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Décembre 2013

Professeur: A. Sebbar

MAT 3720

EXAMEN FINAL

- Cet examen comprends 11 pages dont la dernière est pour le brouillon.
- Aucun document n'est autorisé.
- Les calculatrices non graphiques et non programmables sont permises mais sans utilité pour cet examen.
- **Encadrer toutes vos réponses finales.**
- Vous pouvez utiliser le verso des pages pour continuer vos réponses si nécessaire.
- Quelques formules sont fournies à la fin de l'examen.

Problème 1:[7 points] Trouver la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = x^2 + x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Problème 2:[7 points] Résoudre le problème de la chaleur à une dimension suivant:

$$u_t = 9u_{xx} , \quad 0 < x < 3 , \quad t > 0.$$

$$\text{Conditions aux limites: } u(0, t) = 5 , \quad u(3, t) = 2.$$

$$\text{Conditions initiales: } u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right).$$

Problème 3:[10 points] Résoudre le problème d'onde suivant (**faire toutes les étapes**):

$$u_{tt} = 16u_{xx} , \quad 0 < x < 2 , \quad t > 0,$$

$$\text{Conditions aux limites: } u(0, t) = 0 , \quad u_x(2, t) = 0 , \quad t > 0.$$

$$\text{Conditions initiales: } u(x, 0) = -2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right) , \quad u_t(x, 0) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right).$$

Problème 4: [13 points] On considère une sphère S de rayon $R = 1$ cm. On voudrait étudier la distribution du potentiel électrique autour de S , avec l'hypothèse que le potentiel est borné à l'intérieur de S et nul à l'infini. Pour les coordonnées sphériques r, θ, ϕ , on suppose que le potentiel $u(r, \phi)$ ne dépend pas de θ . Dans ce cas $u(r, \phi)$ satisfait l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin(\phi) u_\phi) = 0.$$

(a) En utilisant la séparation des variables $u = G(r)H(\phi)$, et l'équation de Laplace satisfaite par $u(r, \phi)$, montrer que $G(r)$ est solution de l'équation de d'Euler:

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0.$$

(b) En posant $k = n(n + 1)$, trouver les deux solutions indépendantes (chercher $G(r)$ sous la forme r^α).

(c) En utilisant le changement de variable $w = \cos(\phi)$, montrer que $H(\phi)$ satisfait l'équation de Legendre:

$$(1 - w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n + 1)H = 0.$$

(d) Expliquer pourquoi n doit être un entier dans notre situation.

(e) Sachant que la solution de cette équation est $P_n(w) = P_n(\cos \phi)$ où P_n est le polynôme de Legendre de degré n , expliquer pourquoi la solution $u_n = H_n(\cos \phi)G_n(r)$ à l'intérieur de la sphère a la forme:

$$u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos \phi).$$

et la solution à l'extérieur de la sphère a la forme:

$$u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi).$$

(f) En superposant les solutions propres, trouver $u(r, \phi)$ et $u^*(r, \phi)$ avec la condition initiale:

$$u(1, \phi) = 2 \sin^2 \phi + \sin \phi \cot \frac{\phi}{2}.$$

Problème 5:[13 points] Soit une plaque circulaire de rayon 5 cm, aux faces isolées et de température nulle au bord. On veut étudier le problème de la chaleur sur cette plaque. La température $u(r, \theta, t)$ satisfait l'équation de Laplace:

$$u_t = 16 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq 5, \quad t > 0,$$

où on a supposé que $u(r, \theta, t) = u(r, t)$ ne dépend pas de θ . On suppose que $u(r, t)$ est bornée et satisfait la condition aux limites $u(5, t) = 0$.

(a) En posant $u(r, t) = W(r)G(t)$, et en **justifiant le choix des signes des constantes de la séparation des variables**, montrer que G et W satisfont:

$$\dot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + k^2 W(r) = 0.$$

(b) En faisant le changement de variable $s = kr$ montrer que $W(r)$ satisfait l'équation de Bessel d'ordre 0. Expliquer pourquoi W a la forme $W(r) = AJ_0(kr)$.

(c) Quelles sont les valeurs k_m de k qui permettent à $W(r)$ de satisfaire la condition aux limites.

(d) Résoudre pour $G(t)$ avec les valeurs trouvées de k_m .

(e) Trouver $u(r, t)$ avec la condition initiale

$$u(r, 0) = -J_0\left(\frac{\alpha_1}{5}r\right) + 2J_0\left(\frac{\alpha_3}{5}r\right) + 5J_0\left(\frac{\alpha_5}{5}r\right) = f(r),$$

où les α_n sont les zéros de J_0 .

(f) Etudier les modes propres u_1 , u_2 et u_3 . En particulier, dessiner pour chaque mode les cercles où la température est nulle tout en **déterminant explicitement les rayons de ces cercles**.

Quelques formules

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x),$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Les premiers polynômes de Legendre sont:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2, P_3(x) = 5x^3/2 - 3x/2$$

L'équation de Bessel d'ordre ν est:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Brouillon