Solutionnaire

Université d'Ottawa

MAT1730A Examen Partiel

16 Novembre 2016. Durée: 80 minutes, Professeur: Ndouné Ndouné

Prénom:______________________

Nom:________________________

DGD 1 DGD 2

Ne **pas** écrire votre numéro d'étudiant sur cette page d'accueil. S'il vous plaît **écrire** votre numéro d'étudiant sur la deuxième page.
Prenez le temps de lire l'intégralité du document avant de commencer à écrire. Lire attentivement chaque question. Rappelez-vous que certaines questions valent plus de points que d'autres. Prenez note des questions dont vous êtes confiant que vous pouvez faire, et ensuite les traiter en premier: vous n'êtes pas tenu de procéder dans l'ordre donné.

- Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.
- Ceci est un examen à livre fermé, et aucune note de toute nature n'est autorisée. L'utilisation des cellulaires, téléphones, téléavertisseurs ou tout stockage de texte ou dispositif de communication **n'est pas autorisée.**
- Seules les calculatrices approuvées par la Faculté seront permises lors de cet examen, ces calculatrices sont (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).

  La bonne réponse doit être justifiée écrite lisiblement et logiquement: vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est correcte. Répondez à ces questions dans l'espace prévu. Utilisez le verso des pages pour des calculs supplémentaires si nécessaire.
- Ainsi il est possible de vérifier votre travail.
- S'il vous plaît ne pas détacher les pages.
- Bonne chance!

Numéro d'étudiant:____________________, Total: __________ sur 30

Question	1	2	3	4	5	6
Marks						

Question 1. [2 points] La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, & x \neq 1, \\ k, & x = 1, \end{cases}$$

est continue au point $x = 1$ pour $k =$ $\boxed{\frac{2}{3}}$

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}$$

Continuité: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ (car $1 \in D_f$).

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

$f(1) = k$

Alors f est continue si $k = \frac{2}{3}$.

Question 2. [3 points] Lorsqu'une maladie apparaît dans une population, les autorités sanitaires enregistrent le nombre de personnes infectées. Une fonction qui décrit cette quantité est $y(t) = 2t^3e^{-t/4}$, où $t \geq 0$ est le temps en jours et $y(t)$ est le nombre (en milliers de personnes) de personnes infectées.

Les plus hauts niveaux d'infection $\boxed{12}$

Au sommet de l'infection, il y a $\boxed{2 \cdot 12^3 e^{-3} \text{ mille}}$ personnes infectées.

$y'(t) = 2\left(3t^2 e^{-\frac{t}{4}} - \frac{t^3}{4} e^{-\frac{t}{4}}\right) = 2t^2\left(3 - \frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}}$

$y'(t) = 0$ si $t = 0$ ou $t = 12$.

$\left.\begin{array}{l} y'(t) > 0 \text{ si } 0 < t < 12 \\ y'(t) < 0 \text{ si } t > 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$ le point $t = 12$ est maximum global

	0		12		∞
$y'(t)$		+	0	−	
$y(t)$		↗		↘	

Question 3. [2 points] Soit f une fonction définie pour tous les nombres réels. On suppose que f a une dérivée première continue et la dérivée seconde continue pour tous les nombres réels. Pour chacun des cas ci-dessous, indiquez si la proposition est vraie.

La fonction f a nécessairement **un minimum global** si...

A) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$. vrai/faux

B) ...$f''(x) > 0$ pour tout x. vrai/faux

C) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et f est concave vers le haut partout. vrai/faux

D) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et f' change de signe. vrai/faux

Question 4. [9 points] Calculer la dérivée $y'(x)$ de la fonction $y(x)$. Ne pas simplifier votre réponse.

(a) $y(x) = \frac{\ln(x^2)+e^{x^4}}{\sqrt{x}}$

$y'(x) =$ $\boxed{}$

$$y'(x) = \frac{1}{x}\left(\left(\frac{2}{x}+4x^3e^{x^4}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln(x^2)+e^{x^4}\right)\right)$$

(b) $y(x) = x^{\cos(x)}$

$y'(x) =$ $\boxed{}$

1°) $\ln y(x) = \cos(x)\ln(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos x}{x}$

$\Rightarrow y'(x) = \left(-\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos x}{x}\right) x^{\cos(x)}$

2°) $y'(x) = \left(e^{\ln(x)\cos(x)}\right)' = \left(\frac{\cos x}{x} - \sin(x)\ln(x)\right) e^{\ln(x)\cos(x)}$

(c) $x^2y^2 = e^{2x+4y}$

$y'(x) =$ $\boxed{}$

Dérivation implicite : $(x^2y^2)' = \left(e^{2x+4y}\right)'$

$2xy^2 + 2x^2y'y = (2+4y')e^{2x+4y}$, on cherche y' !

Donc $\left(2x^2y - 4e^{2x+4y}\right)y' = 2e^{2x+4y} - 2xy^2$

$$y' = \frac{2e^{2x+4y} - 2xy^2}{2x^2y - 4e^{2x+4y}}$$

Question 5. [8 points] Calculer les limites suivantes en utilisant des règles vues en classe. La table de valeurs ou l'utilisation de votre calculatrice ne vous donnera pas de points.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \boxed{}$

1ère méthode $\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{(1+5x)-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+x^2}\right)} = \dfrac{x(5-x)}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(5-x)}{x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{5-x}{\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+x^2}}$

$= \dfrac{5}{2}$.

2e méthode Lorsque $x\to 0$; $\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x^2} \longrightarrow 0$; Donc on a une forme indéterminée de l'Hôpital.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2\sqrt{1+5x}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{5}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\ln(2x^2-2)-2\ln(x+3)) = \boxed{}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\ln(2x^2-2)-2\ln(x+3)\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x^2-2}{(x+3)^2}\right)$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x^2-2}{x^2+3x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = \ln(2)$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3x}}{\sin(\sqrt{x})} = \boxed{\sqrt{3}}$

Lorsque $x \to 0$

alors $\sqrt{3x} \to 0$ et $\sin(\sqrt{x}) \to 0$; C'est une forme de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3x}}{\sin(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} * \cos(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}}{\cos(\sqrt{x})} = \sqrt{3}$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Lorsque $x \to 0$ $\cos(x)-1 \to 0$ et $x^2 \to 0$.

C'est une forme de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Question 6. [6 points] On suppose que la fonction f possède une dérivée première et une dérivée seconde continues pour tout $x \in]-\infty, \infty[$. Supposons que la fonction a les propriétés suivantes:

- $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$
- $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$
- $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $f(0) = 0$

Répondre aux questions suivantes

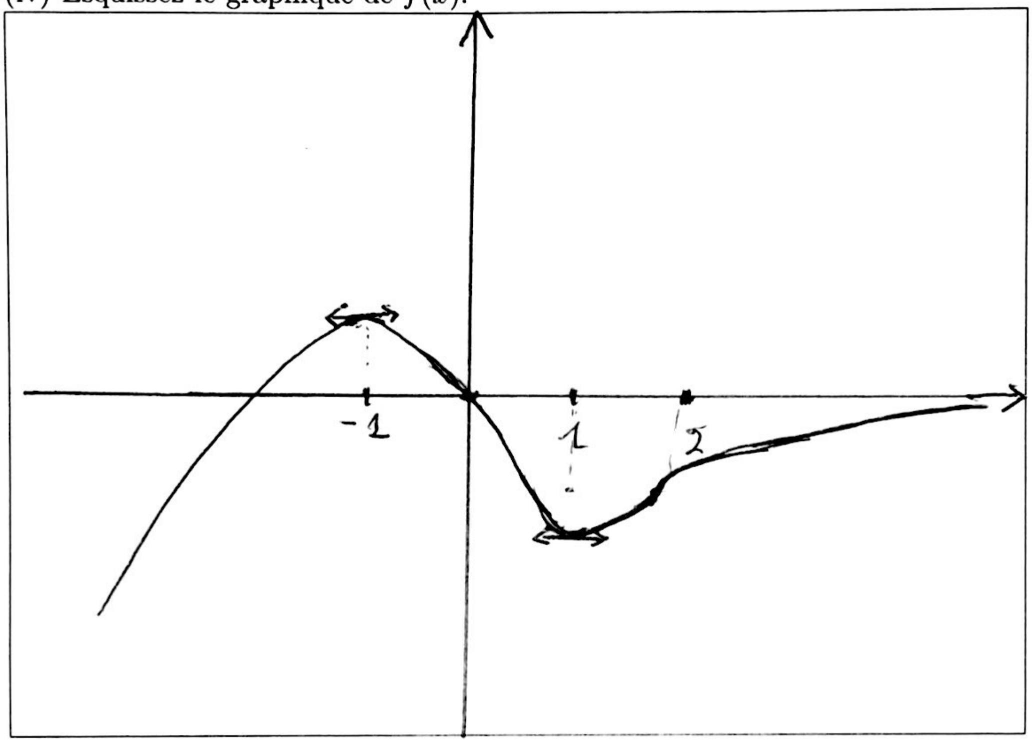
(i) Construire le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$ -1 0 1 2 ∞
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ | $-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ ↘ ↗ 0
$f''(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
Concavité de $f(x)$	Concave vers le bas | Concave vers le haut | Concave vers le bas

(ii) La fonction $f(x)$ atteind le maximum global en $\boxed{x = 1}$

(iii) La fonction $f(x)$ admet-elle un minimum global? si oui en $\boxed{\text{non}}$

(iv) Esquissez le graphique de $f(x)$.



Université d'Ottawa

MAT1330B Examen Partiel

16 Novembre 2016. Durée: 80 minutes, Professeur: Ndouné Ndouné

Solutionnaire

Prénom:____________________

Nom:____________________

DGD 1 DGD 2

Ne **pas** écrire votre numéro d'étudiant sur cette page d'accueil. S'il vous plaît écrire votre numéro d'étudiant sur la deuxième page.
Prenez le temps de lire l'intégralité du document avant de commencer à écrire. Lire attentivement chaque question. Rappelez-vous que certaines questions valent plus de points que d'autres. Prenez note des questions dont vous êtes confiant que vous pouvez faire, et ensuite les traiter en premier: vous n'êtes pas tenu de procéder dans l'ordre donné.

- Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.
- Ceci est un examen à livre fermé, et aucune note de toute nature n'est autorisée. L'utilisation des cellulaires, téléphones, téléavertisseurs ou tout stockage de texte ou dispositif de communication **n'est pas autorisée.**
- Seules les calculatrices approuvées par la Faculté seront permises lors de cet examen, ces calculatrices sont (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X).

  La bonne réponse doit être justifiée écrite lisiblement et logiquement: vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est correcte. Répondez à ces questions dans l'espace prévu. Utilisez le verso des pages pour des calculs supplémentaires si nécessaire.
- Ainsi il est possible de vérifier votre travail.
- S'il vous plaît ne pas détacher les pages.
- Bonne chance!

Numéro d'étudiant:____________________, Total: __________ sur 30

Question	1	2	3	4	5	6
Marks						

Question 1. [2 points] La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}, & x \neq 2, \\ k, & x = 2, \end{cases}$$

est continue au point $x = 2$ pour $k =$ $\boxed{}$

$$\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

f est continue en $x=2$ si

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

on a $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$.

$f(2) = k$.

f est continue si $k = \frac{3}{2}$.

Question 2. [3 points] Lorsqu'une maladie apparaît dans une population, les autorités sanitaires enregistrent le nombre de personnes infectées. Une fonction qui décrit cette quantité est $y(t) = 3t^4 e^{-t/4}$, où $t \geq 0$ est le temps en jours et $y(t)$ est le nombre (en milliers de personnes) de personnes infectées.

Les plus hauts niveaux d'infection $\boxed{16}$

Au sommet de l'infection, il y a $\boxed{3\cdot(16)^4 e^{-4}}$ milles personnes infectées.

$$y'(t) = 3\left(4t^3 e^{-\frac{t}{4}} - \frac{t^4}{4} e^{-\frac{t}{4}}\right) = 3t^3\left(4 - \frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}}$$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 16$.

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) > 0 \text{ si } 0 < t < 16 \\ y'(t) < 0 \text{ si } t > 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Le point } t = 16 \text{ est un maximum global.}$$

Question 3. [2 points] Soit f une fonction définie pour tous les nombres réels. On suppose que f a une dérivée première continue et la dérivée seconde continue pour tous les nombres réels. Pour chacun des cas ci-dessous, indiquez si la proposition est vraie.

La fonction f a nécessairement **un minimum global** si...

A) ...$f''(x) > 0$ pour tout x. vrai/faux

B) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et f est concave vers le haut partout. vrai/faux

C) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$. vrai/faux

D) ...il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$ et f' change de signe. vrai/faux

Question 4. [9 points] Calculer la dérivée $y'(x)$ de la fonction $y(x)$. Ne pas simplifier votre réponse.

(a) $y(x) = \frac{\ln(x^3)+e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

$y'(x) = \boxed{}$

$$y'(x) = \frac{1}{x}\left(\left(\frac{3}{x} + 2xe^{x^2}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln(x^3) + e^{x^2}\right)\right)$$

(b) $y(x) = x^{\tan(x)}$

$y'(x) = \boxed{}$

$$\ln(y(x)) = \tan(x)\ln(x).$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \sec^2(x)\ln(x) + \frac{\tan(x)}{x}; \text{ donc}$$

$$y'(x) = \left(\sec^2(x)\ln(x) + \frac{\tan(x)}{x}\right)x^{\tan(x)}$$

(c) $x^3y^2 = e^{3x+2y}$

$y'(x) = \boxed{}$

$$3x^2y^2 + 2x^3y'y = (3+2y')e^{3x+2y}$$

Question 5. [8 points] Calculer les limites suivantes en utilisant des règles vues en classe. La table de valeurs ou l'utilisation de votre calculatrice ne vous donnera pas de points.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+3x) - (1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(3-x)}{x\left(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{3-\cancel{x}}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{2}$$

(b) $\lim_{x \to \infty} (\ln(4x^2 - 2) - 2\ln(x+1)) = \boxed{\ln(4)}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln(4x^2-2) - 2\ln(x+1)\right) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{4x^2-2}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{4x^2-2}{x^2+2x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{4x^2}{x^2}\right) = \ln(4)$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{5x}}{\sin(\sqrt{x})} = \boxed{\sqrt{5}}$

Lorsque $x \to 0$; $\sqrt{3x} \to 0$ et $\sin(\sqrt{x}) \to 0$

Cette limite est une forme de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{5x}}{\sin(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{2\sqrt{5x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{5}}{\cos(\sqrt{x})} = \sqrt{5}$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-1} = \boxed{-2}$

$x^2 \to 0$ et $\cos(x)-1 \to 0$ lorsque $x \to 0$.

C'est une forme de l'Hôpital.

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{-\cos(x)} = -2$

Question 6. [6 points] On suppose que la fonction f possède une dérivée première et une dérivée seconde continues pour tout $x \in]-\infty, \infty[$. Supposons que la fonction a les propriétés suivantes:

- $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$
- $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$
- $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $f(0) = 0$

Répondre aux questions suivantes

(i) Construire le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗		↗	0
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Concavité de $f(x)$		Concave vers le bas				Concave vers le haut				Concave vers le bas	

(ii) La fonction $f(x)$ atteind le maximum global en $\boxed{x = 1}$

(iii) La fonction $f(x)$ admet-elle un minimum global? si oui en $\boxed{\text{non}}$

(iv) Esquissez le graphique de $f(x)$.