



MAT 1741 Examen de pratique pour le final
 Automne 2015
 Enseignant : Abdelkrim El basraoui

Nom : _____ Prénom : _____

N° d'étudiant : _____ N° de siège _____

Instructions :

- Vous avez 3 heures pour compléter l'examen.
- C'est un test à livres fermés. L'utilisation de la **calculatrice**, téléphones, tablettes et tout autre instrument de mise en réserve ou de communication est **interdite**.
- Lisez chaque question attentivement avant d'y répondre.
- Les questions 1 à 10 sont des questions à choix multiples. Ces questions ont une valeur de 1 point chacune, et on n'accorde pas de points partiels. Veuillez écrire vos réponses dans la case correspondante de la grille "Réponses aux QCM" ci-dessous,

Réponses aux QCM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Les questions 11 à 15 valent 6 points chacune. La question bonus vaut 4 points. Toutes ces questions exigent une solution complète et une justification écrite de manière lisible et logique : vous devriez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est correcte.
- Répondez au questions dans l'espace fourni. Utilisez le verso des feuilles si nécessaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- Bonne chance! Good Luck!

N'écrivez rien dans ce tableau

QCM	11	12	13	14	15	Bonus	Total

1. Soit $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$. Lequel des énoncés suivants est vrai ?
- A. $(0, 0, 0) \in X$ et X est fermé sous la multiplication par scalaires.
 - B. $(0, 0, 0) \notin X$ mais X est fermé sous l'addition.
 - C. X est fermé sous l'addition mais X n'est pas fermé sous la multiplication par scalaires.
 - D. X est fermé sous l'addition et X est fermé sous la multiplication par scalaires.
 - E. X n'est pas fermé sous l'addition mais X est fermé sous la multiplication par scalaires.
 - F. Aucun des énoncés ci-dessus est vrai.

2. Lequel des énoncés suivants est **vrai** ?

- I. Un ensemble $\{u, v, w\}$ est linéairement indépendant si $a = b = c = 0$ implique $au + bv + cw = 0$.
- II. Un ensemble $\{u, v, w\}$ est linéairement indépendant si $au + bv + cw = 0$ implique $a = b = c = 0$.
- III. Un ensemble $\{u, v, w\} \subset V$ engendre l'espace vectoriel V si tout vecteur de V s'écrit sous forme de combinaison linéaire de u et w .
- IV. $\{(1, -1), (1, 1)\}$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^2 .

- A. I & II seulement
- B. II & IV seulement
- C. II & III seulement
- D. I & III & IV seulement
- E. II & III & IV seulement
- F. Tous les énoncés ci-dessus sont vrais.

3. On considère le système $Ax = b$, avec n équations et n inconnues, tel que $\text{rg}(A) = n - 1$ et $\text{rg}([A|b]) = n - 1$. Lequel des énoncés suivants est vrai ?
- A. Le système n'admet aucune solution.
 - B. Le système admet une unique solution.
 - C. Le système admet une infinité de solutions.
 - D. Le système admet exactement $n - 1$ solutions.
 - E. Le déterminant de A est non nul.
 - F. Un tel système n'existe pas.

4. Si C est une matrice $m \times 2$ et $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, alors la deuxième colonne de CD

- A. n'est définie que pour $m = 2$.
- B. est égale au double de la première colonne de C
- C. est égale à la première colonne de C
- D. est égale à la deuxième colonne de C
- E. est égale à la somme des deux premières colonnes de C
- F. est égale à la somme du double de la première colonne de C et du triple de la deuxième colonne de C .

5. La dimension de $S = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid A = A^t \right\}$ est

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4
- F. 5

6. Soit A une 7×12 matrice telle que $\text{rg}(A) = 6$ et soit $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{12} \mid Ax = 0\}$ et $\text{Col}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^{12}\}$. Lequel des énoncés suivants est vrai ?

- A. $\dim(\text{Col}(A)) = 6$, $\dim(\text{Nul}(A)) = 1$
- B. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^{12}$, $\dim(\text{Nul}(A)) = 6$
- C. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^7$, $\dim(\text{Nul}(A)) = 5$
- D. $\dim(\text{Col}(A)) = 5$, $\text{Nul}(A) = \mathbb{R}^{12}$
- E. $\dim(\text{Col}(A)) = 6$, $\dim(\text{Nul}(A)) = 6$
- F. $\text{Col}(A) = \{0\}$, $\dim(\text{Nul}(A)) = 5$

7. Soient A et B deux matrices telles que $A^t = B^{-1}$ et $B^t = -B^{-1}$. Alors, $(ABA)^t$ est égale à

- A. $-B^3$
- B. B^2A
- C. $-B^{-3}$
- D. B^{-3}
- E. B^3
- F. AB^2

8. Deux énoncés parmi les suivants sont faux, lesquels ?

- (i) Pour toutes matrices inversibles A et B de taille $n \times n$, $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.
- (ii) Pour toutes matrices inversibles A et B de taille $n \times n$, $\det(A^{-1}B^{-1}AB) = 1$.
- (iii) Pour toutes matrices A et B de taille $n \times n$, $(A^tB^t)^t = AB$.
- (iv) Pour toutes matrices inversibles A et B de taille $n \times n$, $(ABA^{-1})^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$.
- (v) Pour toutes matrices A et B de taille $n \times n$, $\det(A^tB) = \det(B^tA)$.

- A. (i) et (iii)
- B. (ii) et (iii)
- C. (iii) et (iv)
- D. (ii) et (iv)
- E. (ii) et (v)
- F. (i) et (v)

9. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, Calculer $\begin{vmatrix} 4g & a & d - 2a \\ 4h & b & e - 2b \\ 4i & c & f - 2c \end{vmatrix}$.

- A. 24
- B. -24
- C. 12
- D. -12
- E. 6
- F. -6

10. Soit $\mathbf{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Lesquels des ensembles suivants sont linéairement indépendants dans $\mathbf{F}(\mathbb{R})$?

$$S = \{\cos x, \sin x\}$$

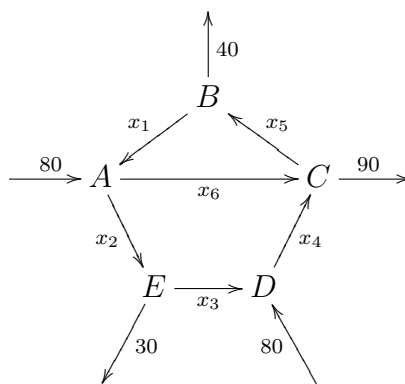
$$T = \{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$$

$$U = \{1, 2 \cos^2 x, 3 \sin^2 x\}$$

$$V = \{1, \cos x, \sin x\}$$

- A. T et V .
- B. T et U .
- C. S et T .
- D. S et V .
- E. S , U et V .
- F. S , U et T .

11. On considère le réseau de circulation routière avec les intersections A, B, C, D et E ci-dessous. Chaque flèche correspond à une route à sens unique et chaque nombre apparaissant sur le réseau correspond au nombre de voitures entrant ou quittant les intersection A, B, C, D et E par minute. Chaque nombre x_i dénote le nombre inconnu de voitures circulant le long des routes indiquées pendant la même période de temps.



(Vous devez justifier toutes vos réponses.)

- (a) Écrivez le système des équations linéaires qui décrit ce réseau de circulation. **N'oubliez pas** d'inclure toutes les contraintes nécessaires sur les variables x_i , $i = 1, \dots, 6$. (Ne faites aucune opération sur les équations de votre système : ceci est fait pour vous dans la partie (b). Ne copiez pas les équations données en (b). Vous ne recevrez aucun point dans ce cas.)

- (b) La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée associée au système trouvé en (a) est donnée par

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Trouvez la solution générale du système. (Ignorez les contraintes imposées en (a) pour l'instant.)

- (c) Si le chemin \overline{AC} est fermé pour des travaux routiers, trouver le nombre minimal de voitures le long du chemin \overline{ED} , **en utilisant vos résultats de la partie (b)**.

12. Soient $u_1 = (1, 0, 0, -1)$, $u_2 = (1, -1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $U = \mathcal{L}\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (a) Expliquer brièvement pourquoi U est un sous-espace de \mathbb{R}^4 et $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base pour U .
 - (b) Utiliser le **procédé de Gram-Schmidt** pour trouver une base orthogonale pour U .
 - (c) Trouver la meilleure approximation de $(2, 0, 2, 4)$ par les vecteurs de U .

13. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire que les valeurs propres de A sont 5 et -1.
- (b) Trouver une base pour $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 5x\}$.
- (c) Trouver une base pour $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = -x\}$.
- (d) Trouver, si possible, une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$. Dans le cas échéant, donner une justification.

14. Soit $u = (1, -1, 1)$ et on définit la transformation linéaire $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$S(v) = u \times v, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

- (a) Si $v = (x, y, z)$, prouver que $S(v) = (-y - z, x - z, x + y)$.
- (b) Trouver la matrice canonique de S .
- (c) Trouver une base pour $\text{Nul}(S) = \{v \mid S(v) = 0\}$ et donner une description géométrique complète pour $\text{Nul}(S)$.
- (d) Trouver une base pour $\text{Im}(S)$ et donner une description géométrique complète pour $\text{Im}(S)$.

15. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (peut-être) faux, dans la case donnée.
- Si vous indiquez qu'un énoncé est (peut-être) faux, vous devez **donner un contre-exemple - avec des nombres !**
 - Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez le justifier clairement.
- (a) Soient C une matrice inversible de taille 3×3 et $\{v_1, v_2, v_3\}$ un ensemble linéairement indépendant. Alors, $\{Cv_1, Cv_2, Cv_3\}$ est aussi linéairement indépendant.

RÉPONSE :

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

RÉPONSE :

- (c) Si les colonnes d'une matrice A de taille 17×6 forment un ensemble orthogonal dans \mathbb{R}^{17} , alors $\text{rg}(A) = 6$.

RÉPONSE :

- (d) Soit la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dans chaque cas, donner un énoncé équivalent à
“ A n'est pas inversible”

en termes

- (i) du système linéaire $Ax = 0$:

- (ii) du rang de A :

- (iii) du déterminant de A :

4 pts 16. **Bonus**

Soit A une matrice symétrique de taille 100×100 .

- (a) Prouver que $(Au) \cdot u' = u \cdot (Au')$, où “ \cdot ” représente le produit scalaire.
Suggestion : $u \cdot v = u^t v$ pour $u, v \in \mathbb{R}^{100}$.
- (b) Soit $v_\lambda \in \mathbb{R}^{100}$ un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ , et soit $W = \{w \in \mathbb{R}^{100} \mid w \cdot v_\lambda = 0\}$. Démontrer que si $w \in W$, alors $Aw \in W$.

