



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Examen Final Automne 2013 - MAT 1732 A

Professeur : M'hammed Mountassir

Nom et Prénom de l'étudiant(e) : -----
Numéro d'étudiant(e): -----

Instructions :

- Durée : 180 minutes.
- les calculatrices sont permises.
- L'examen comporte 17 questions.
- 10 questions à choix multiples, chacune notées sur 2 points.
 - 7 questions à développement.
- Seules les calculatrices TI-30 ou TI-30X sont permises
 - Aucune autre documentation n'est permise.
- Recopiez vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau de la page 2.

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Questions à choix multiples

| | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| | Question1 | Question2 | Question3 | Question4 | Question5 |
| Réponse : | | | | | |
| Note : | | | | | |
| | Question6 | Question7 | Question 8 | Question9 | Question10 |
| Réponse : | | | | | |
| Note : | | | | | |

Questions à développement

| | | | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | Question11 | Question12 | Question13 | Question14 | Question15 |
| Note : | | | | | |
| | Question16 | Question17 | | | |
| Note : | | | | | |

PARTIE I: Questions à choix multiples.

Question 1 : Soit l'intégrale impropre suivante $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$, étudier sa convergence ou sa divergence. Si elle converge donner sa valeur.

- A) -2 B) 2 C) 1/2 D) -1/2 E) elle diverge.

Question 2 : Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^{\sqrt{e}} x \ln(x^2) dx$

- B) 1/2 B) $e+1/2$ C) $e/2-1/2$ D) $e/2+1/2$ E) $e/2$

Question 3 : Déterminer le volume obtenu par la rotation de la région délimitée par $y = x^2$; pour $0 \leq x \leq 5$ autour de l'axe des x.

- A) $\pi \text{ unités}^3$ B) 625 unités^3
C) $625 \pi^2 \text{ unités}^3$ D) $625 \pi \text{ unités}^3$ E) $375 \pi \text{ unités}^3$

Question 4 : Déterminer la solution de l'équation à variables séparables suivantes:

$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{x}{t}$ avec $x(1)=1$.

- A) $x(t) = t$ B) $x(t) = t^2$ C) $x(t) = 2t - 1$ D) $x(t) = 1/t$
E) $x(t) = 2t^2 - 1$

Question 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4x + 2^x$$

Identifier l'affirmation correcte.

- A) 1 est un point d'équilibre stable.
B) 1 est un point d'équilibre instable.
C) 2 est un point d'équilibre stable.
D) 2 est un point d'équilibre instable.
E) Ni 1 ni 2 ne sont des points d'équilibre.

Question 6 : Soient les matrices suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Et les affirmations suivantes.

- (i) XY est définie.
- (ii) XZ est définie.
- (iii) ZX^T est défini.
- (iv) La matrice Y inversible.
- (v) Z+XX^T est définie.

Laquelle des combinaisons suivantes est correcte ?

- A) (i), (iii) et (v) sont vraies.
- B) (i), (iv) sont vraies.
- C) Seule (ii) est vraie.
- D) (ii) et (iii) sont vraies.
- E) (iii) et (v) sont vraies.

Question 7 : Laquelle des valeurs suivantes **n'est pas une valeur propre** de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 7 & 5 \\ -4 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- A) 5i B) -5i C) -5 D) 5 E) aucune de ces valeurs n'est une valeur propre.

Question 8 : Soit la fonction $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$. Quel est le domaine de f ?

- A) $\{(x, y) \text{ tels que } x \geq y\}$
- B) $\{(x, y) \text{ tels que } x \leq y\}$
- C) $\{(x, y) \text{ tels que } x > y\}$
- D) $\{(x, y) \text{ tels que } x < y\}$
- E) $\{(x, y) \text{ tels que } x \neq y\}$

Question 9 : Déterminer le plan tangent de la fonction

$$f(x, y) = 3\pi + 3 \cos(2x) - 2\sin(3y)$$

Au point P(π ; π).

- A) $z = -\pi + 6x$
- B) $z = -3 + 9\pi - 6y$.
- C) $z = 3 - 3\pi + 6y$
- D) $z = 9\pi + 6x$
- E) $z = -3\pi - 9y$

Question 10 : Soit la transformation qui au couple $(u, v) \rightarrow (x, y)$ où $x = e^u \cos v$ et $y = e^u \sin v$.

Déterminer le jacobien de cette transformation lorsque $u = 0$ et $v = \pi$

- A) 0.
- B) 2
- C) 1
- D) -1
- E) -2

PARTIE II : Questions à développement.

Question 11 (5 points) : Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{83x + 45}{x^2 + x - 42} dx$$

Question 12 (3 points) : Déterminer l'aire délimitée par les courbes
 $y_1 = (x - 1)^2$ et $y_2 = 5 - x^2$

Question 13 (5 points) : Soit la fonction $z = \ln(x - y)$.

- (a) (1 point) Déterminer son domaine.
- (b) (1 point) Déterminer son image.
- (c) (1 point) Dessiner son domaine.
- (d) (2 points) Dessiner 3 courbes de niveaux de cette fonction.

Question 14 (4 points) : Soit l'équation différentielle suivante :

$$x' = 2x^3 + 15x^2 - 27x$$

- (a) (1,5 point) Trouver les points d'équilibre.
- (b) (1,5 point) Étudier la stabilité de chacun des points d'équilibre.
- (c) (1 point) Dessiner le diagramme des phases de cette équation différentielle.

Question 15 (9 points) : Soit le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y\end{aligned}$$

- (a) (3 points) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ce système.
- (b) (3 points) Donner la solution générale de ce système.
- (c) (3 points) Donner la solution de ce système correspondant aux conditions $x(0)=3$ et $y(0)=0$.

Exercice 16 (7 points): Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (7 points): Une maladie se propage parmi les étudiants d'une université selon le modèle suivant :

$$\frac{dx}{dt} = x\left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{2}\right)$$

Où x est le nombre d'étudiants infectés et t est le temps en jours. Au début il y avait 10 personnes infectées.

- (a) (4 points) Déterminer la solution de cette équation différentielle.
- (b) (2 point) Après combien de jours cette maladie atteindra son maximum ?
- (c) (1 point) Quel est le nombre maximum d'étudiants qui seront infectés ?

