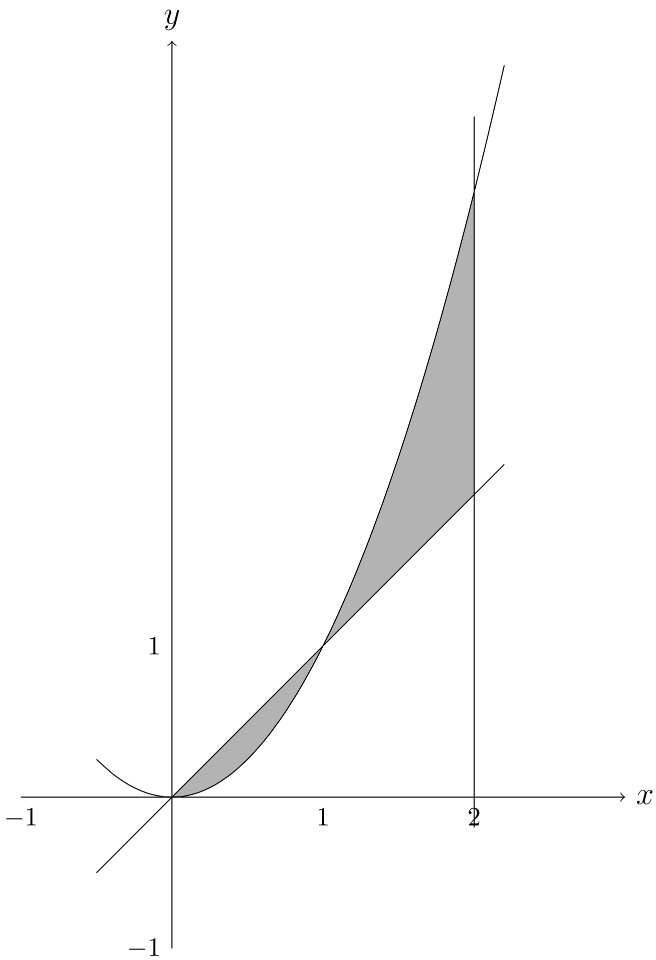
Exercice 1: Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = x$ dans l'intervalle $[0, 2]$.
Indication : Tracer les courbes, application de l'intégration (cours du 6 septembre).
Réponse : Commençons par représenter la région $\mathcal{R}$.



On voit que les courbes s'intersectent au point $x = 1$, $y = 1$, donc on va traiter deux domaines séparément $0 \leq x < 1$ puis $1 \leq x \leq 2$.

Pour $0 \leq x < 1$, on a $x^2 \leq x$, donc l'aire de la région pour $0 \leq x < 1$ est donnée par l'intégrale

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Pour $1 \leq x \leq 2$, on a $x^2 \geq x$, donc l'aire de la région pour $1 \leq x \leq 2$ est donnée par l'intégrale

$$\int_1^2 (x^2 - x)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}.$$

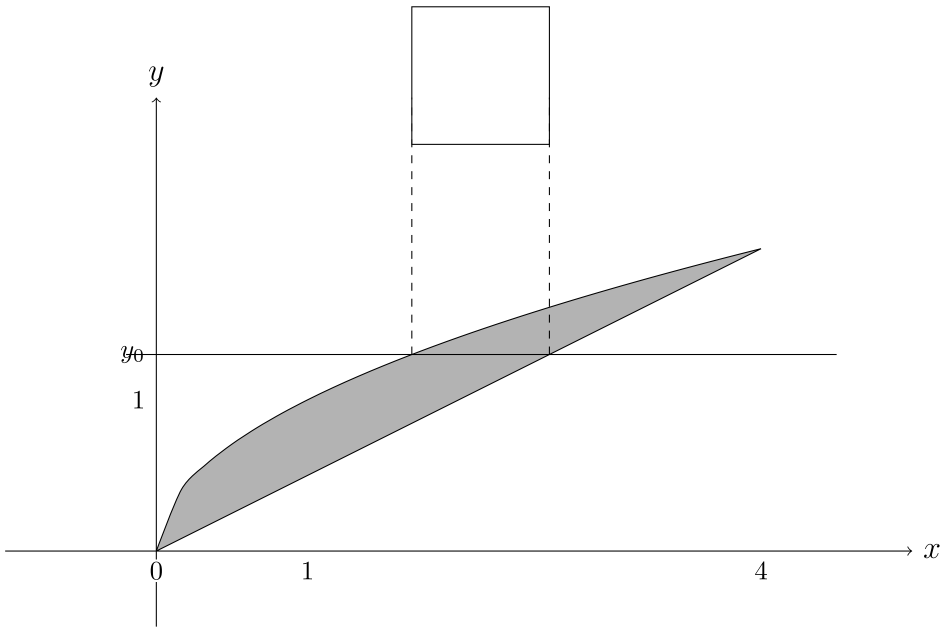
Ainsi l'aire de la région $\mathcal{R}$ est la somme de ces deux aires, donc égale à $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

Exercice 2: On considère la région $\mathcal{R}$ dans le plan xy, sous le graphe de $y=\sqrt{x}$ et au dessus de la droite $y=\frac{x}{2}$.

1. Donner le volume du solide qui a $\mathcal{R}$ pour base et dont les intersections avec des plans perpendiculaires à l'axe des y sont des carrés.

   Indication : Tracer la région $\mathcal{R}$ et l'intersection du solide avec un plan quelconque $y=y_0$, quelle est l'aire de cette intersection ? application de l'intégration (cours du 11 septembre).

   Réponse : Commençons par représenter le solide : on trace la région $\mathcal{R}$ et l'intersection du solide avec un plan quelconque $y=y_0$. Les courbes $y=\sqrt{x}$ et $y=\frac{x}{2}$ s'intersectent au point $x=y=0$ et au point $x=4$, $y=2$.



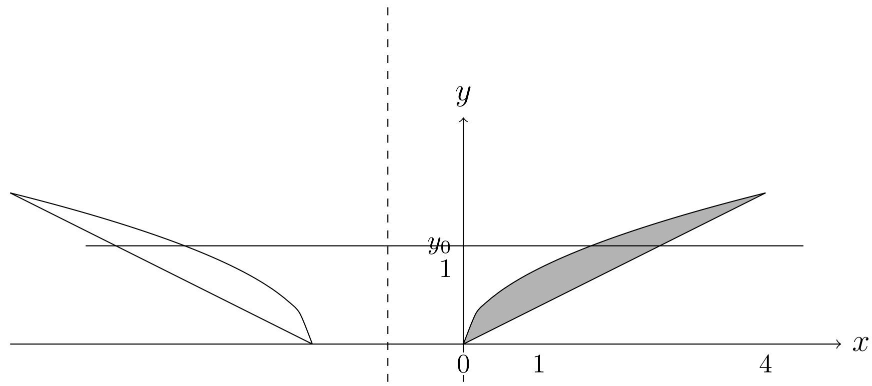
   Pour y_0 fixé entre 0 et 2, l'aire de l'intersection du solide avec le plan P_{y_0} perpendiculaire à l'axe des y en y_0 est l'aire du carré de coté $2y_0-y_0^2$. Donc $A(y_0)=(2y_0-y_0^2)^2$. Ainsi le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 (2y-y^2)^2 dy = \int_0^2 (4y^2-4y^3+y^4)dy \\ &= \big[\frac{4}{3}y^3 - y^4 + \frac{1}{5}y^5\big]_0^2 = \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

2. Donner le volume du solide obtenu par révolution de $\mathcal{R}$ autour de l'axe $x=-1$.

   Indication : Tracer la trace du solide de révolution dans le plan xy, faut-il utiliser la méthode des anneaux ou celle des coquilles cylindriques ? application de l'intégration (cours du 11 septembre).

   Réponse : Commençons par faire un dessin.



Pour y_0 fixé entre 0 et 2, l'intersection du solide avec le plan P_{y_0} perpendiculaire à l'axe des y en y_0 est un anneau de rayon intérieur $1+y_0^2$ et de rayon extérieur $1+2y_0$. L'aire d'un tel anneau est

$$A(y_0) = \pi(1+2y_0)^2 - \pi(1+y_0^2) = \pi\left(4y_0 + 2y_0^2 - y_0^4\right).$$

Ainsi le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(4y + 2y^2 - y^4\right) dy \\ &= \pi\big[2y^2 - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\big]_0^2 \\ &= \pi\left(8 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{104}{15}\pi. \end{aligned}$$

On pouvait aussi utiliser la méthode des coquilles cylindriques, elle mène dans ce cas à calculer l'intégrale

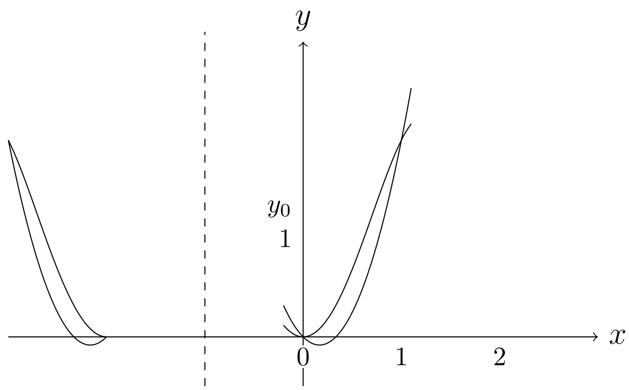
$$\int_0^4 \pi(\sqrt{x} - \frac{x}{2})(x+1)dx$$

qui est tout de même un peu moins facile à calculer.

Exercice 3: Soit $\mathcal{R}$ la région située en dessous du graphe de $y = 3x^2 - x^4$ et au dessus du graphe de $y = 3x^2 - x$. Soit $\mathcal{S}$ le solide de révolution obtenu par la rotation de $\mathcal{R}$ autour de l'axe $x = -1$. Donner le volume de $\mathcal{S}$.

Indication : Tracer la trace du solide de révolution dans le plan xy, faut-il utiliser la méthode des anneaux ou celle des coquilles cylindriques ? application de l'intégration (cours du 11 septembre).

Réponse : Commençons par représenter la trace du solide dans le plan xy. Les courbes $y = 3x^2 - x^4$ et $y = 3x^2 - x$ s'intersectent au points $x = y = 0$ et au point $x = 1$, $y = 2$.



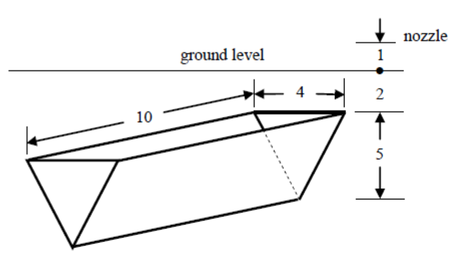
Ici la méthode des coquilles cylindrique est plus adaptée. Pour x_0 fixé entre 0 et 1, la coquille cylindrique obtenue par la rotation de la bande mince au dessus de x_0 a pour rayon $r(x_0) = 1 + x_0$ et hauteur $h(x_0) = 3x_0^2 - x_0^4 - (3x_0^2 - x_0) = x_0 - x_0^4$, donc son aire est

$$2\pi r(x_0)h(x_0) = 2\pi(1 + x_0)(x_0 - x_0^4) = 2\pi(x_0 + x_0^2 - x_0^4 - x_0^5).$$

Ainsi le volume du solide de révolution est

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\pi(x + x^2 - x^4 - x^5)dx &= 2\pi\big[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\big]_0^1 \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{14}{15}\pi.\end{aligned}$$

Exercice 4: Un réservoir de la forme d'un prisme à base triangulaire est enterré horizontalement dans le sol à 2 mètres de profondeur. Il est rempli d'huile de densité ρ kg/m^3. On note g l'accélération gravitationnelle. Donner le travail requis (en Joules) pour pomper l'huile du réservoir à 1 mètre au dessus du sol.



Indication : Quel est le volume d'une tranche mince d'huile dans le réservoir à profondeur x ? quelle distance cette tranche d'eau doit-elle parcourir ? (cours du 13 septembre).
Réponse : On étudie une couche mince d'huile située à x mètre depuis le haut du réservoir et d'épaisseur dx. Le volume de cette couche est alors, en utilisant le théorème de Thalès :

$$dV(x) = 10 \times \frac{4}{5}(5 - x)dx = 8(5 - x)dx.$$

Son poids est donc $dP(x) = \rho g \times V(x) = 8\rho g(5 - x)dx$. Le travail requis pour pomper cette couche d'huile à 1 mètre au dessus du sol, c'est à dire $1 + 2 = 3$ mètres au dessus du réservoir

est donc
$$dW(x) = (x+3)dP(x) = 8\rho g(5-x)(x+3)dx.$$
Donc le travail total requis est
$$\begin{aligned}W &= \int_0^5 8\rho g(5-x)(x+3)dx = 8\rho g\int_0^5 15+2x-x^2dx\\ &= 8\rho g\big[15x+x^2-\frac{1}{3}x^3\big]_0^5 = 8\left(75+25-\frac{125}{3}\right)\rho g\\ &= \frac{1400}{3}\rho g.\end{aligned}$$

Exercice 5: Donner la valeur moyenne de la fonction $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ dans l'intervalle $[1,5]$.
Indication : Il faut connaître la formule de la valeur moyenne, c'est l'intégrale de la fonction divisée par la taille de l'intervalle (cours du 13 septembre).
Réponse : On calcule la valeur moyenne par la formule
$$\begin{aligned}\frac{1}{5-1}\int_1^5 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx &= \frac{1}{4}\big[\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+1}\big]_1^5\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\right) = \frac{3}{52}.\end{aligned}$$

Exercice 6: Utiliser la définition pour déterminer si l'intégrale impropre $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donner sa valeur.
Indication : Pourquoi est-ce que cette intégrale est impropre ? la définition de l'intégrale impropre est la limite si elle existe d'une intégrale définie avec une borne qui tend vers le point où il y a un problème (cours du 18 septembre).
Réponse : La fonction sous l'intégrale n'est pas continue en $x = 2$, c'est que qui en fait un intégrale impropre. On a par définition
$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx\\ &= \lim_{t\to 2^+}\left[2\sqrt{x-2}\right]_t^4\\ &= \lim_{t\to 2^+}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{t-2}\right)\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Comme la limite existe, on en déduit que l'intégrale est convergente, et on a $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{2}$.

Exercice 7: Utiliser le test de comparaison pour déterminer la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}}dx$;

2. $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x}dx$

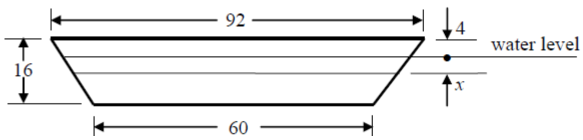
Indication : Pourquoi est-ce que chacune de ces intégrale est impropre ? si on pense que l'intégrale est convergente, il faut majorer la fonction par une fonction dont l'intégrale est convergente (cours du 18 et du 20 septembre).
Réponse :

1. La fonction $\frac{2\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}}$ est continue sur $[1,+\infty)$, mais l'intervalle d'intégration est infini. On cherche à ne garder que les termes prédominants quand x tend vers l'infini. Pour $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \geq 1$ donc $2\sqrt{x}-1 \geq \sqrt{x}$. D'autre part, $\sqrt{x} \leq x$ donc $\sqrt{x}+x \leq 2x$. Ainsi
$$\frac{2\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}} \geq \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Or l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ est divergente (car $1/2 < 1$, c'est une intégrale de Riemann sur $[1,+\infty)$), donc d'après le test de comparaison, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}}dx$ est divergente.
2. La fonction $\frac{1}{2\sqrt{x}-x}$ est continue sur $(0,1]$, avec une discontinuité en 0. On cherche à ne garder que les termes prédominants quand x tend vers 0. Pour $x \leq 1$, on a $\sqrt{x} \geq x$ donc $2\sqrt{x}-x \geq \sqrt{x}$. Ainsi
$$\frac{1}{2\sqrt{x}-x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergente (car $1/2 < 1$, c'est une intégrale de Riemann sur $(0,1]$), donc d'après le test de comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x}dx$ est convergente.

Exercice 8:

Donner la longueur de l'arc de courbe $y = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$, pour $1 \leq x \leq 2$.
Indication : Il faut connaître la formule qui donne la longueur d'arc d'une courbe, c'est une intégrale qui met en jeu le carré de la dérivée de la fonction (cours du 25 septembre).
Réponse : On commence par calculer la dérivée de la fonction $y(x)$:
$$y'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}.$$
Alors la longueur de l'arc de courbe recherché est donné par l'intégrale
$$\begin{aligned}
L = \int_1^2 \sqrt{1+y'(x)^2}dx &= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2}dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)dx \\
&= [\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{4}x^2]_1^2 = \frac{\ln(2)}{2}+1-\frac{1}{4} = \frac{\ln(2)}{2}+\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

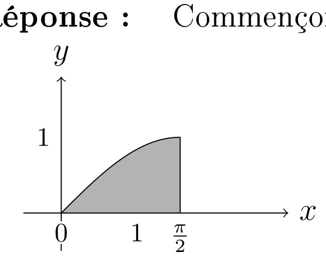
Exercice 9: On se donne un barrage de la forme d'un trapèze de hauteur 16 mètres, de largeur 92 mètres en haut, et 60 mètres en bas. Le niveau de l'eau est 4 mètres en dessous du sommet du barrage. Soit x la profondeur d'une bande mince horizontale du barrage.



On note ρ la densité de l'eau et g l'accélération gravitationnelle. Trouver la valeur de la force hydrostatique agissant sur le barrage (en Newton).
Indication : Quelle est la surface d'une tranche fine de barrage à profondeur x ? Quelle est la force hydrostatique à cette profondeur ? (cours du 25 septembre).
Réponse : La longueur d'une tranche fine du barrage à la profondeur x est $L(x) = 60 + 2(12 - x)$, donc son aire, si elle est d'épaisseur dx est $dA(x) = L(x)dx = (84 - 2x)dx$. Comme la force exercée à la profondeur x est la pression ρgx sur chaque unité de surface, la force hydrostatique exercée sur la bande mince de barrage à profondeur x est $dF(x) = \rho gx(84 - 2x)dx$. La force totale est donc :

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{12} \rho gx(84 - 2x)dx = \rho g \int_0^{12} (84x - 2x^2)dx \\ &= \rho g\left[42x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{12} = 4896\rho g. \end{aligned}$$

Exercice 10: Une plaque uniforme de densité $\rho = 1$ a la forme de la région $\mathcal{R}$ entre le graphe de $y = \sin(x)$ et l'axe des x, pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Donner les coordonnées du centre de masse de la plaque.
Indication : Il faut connaître les formules qui donnent les coordonnées du centre de masse. Les coordonnées sont données par le calcul des moments par rapport à l'axe des x, et par rapport à l'axe des y, il ne faut pas oublier de diviser par la masse. Attention, le moment par rapport à l'axe des x divisé par la masse donne l'ordonnée du centre de masse. On peut aussi s'aider des symétries pour trouver le centre de masse : celui-ci doit se trouver sur tous les axes de symétries de la figure (cours du 25 septembre).
Réponse : Commençons par un dessin :



La plaque n'a pas de symétrie évidente que l'on pourrait utiliser, on se sert des formules du cours. On commence par calculer la masse de la plaque :

$$m = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Le moment par rapport à l'axe des x de la plaque est

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2x))\, dx = \frac{\pi}{8}.$$

Le moment par rapport à l'axe des y de la plaque est

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos(x)dx = 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

On en déduit que les coordonnées du centre de masse sont

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{1}{1}, \frac{\pi}{8\times 1}\right) = \left(1, \frac{\pi}{8}\right).$$

Exercice 11:

Utiliser la méthode d'Euler de pas $h = 0.5$ pour trouver une approximation de $y(2)$ où $y(t)$ est la solution du problème à conditions initiales $y' = -\frac{1}{t^3 y}$, $y(1) = 2$.
Indication : Le principe de la méthode d'Euler est d'approcher une fonction par sa tangente (cours du 2 octobre).
Réponse : On utilise la méthode d'Euler de pas $h = 0.5$, pour l'équation $y' = F(t,y)$ où $F(t,y) = -\frac{1}{t^3 y}$ et $y(1) = 2$ alors $t_0 = 1$, $t_1 = 1.5$, $t_2 = 2$.

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 = 2\\
y(x_1) &\simeq y_1 = y_0 + F(t_0,y_0)h = 2 - \frac{1}{1^3 2}\times 0.5 = 1.75\\
y(x_2) &\simeq y_2 = y_1 + F(t_1,y_1)h = 1.75 - \frac{1}{(1.5)^3\times 1.75}\times 0.5 \simeq 1.665\ldots
\end{aligned}$$

Donc $y(2) \simeq 1.665$.

Exercice 12:

Résoudre le problème à condition initiale $y' = y^2\cos(t)$, $y(0) = 1$.
Indication : C'est une équation différentielle séparable (cours du 2 octobre).
Réponse : On reconnaît une équation différentielle séparable. La solution stationnaire est $y(t) = 0$, donc les autres solutions ne s'annulent pas et on peut diviser par y sans risque dans l'équation.

Si y n'est pas la solution stationnaire, l'équation est équivalente à

$$\frac{dy}{y^2} = \cos(t)dt.$$

On prend les primitives :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos(t)dt$$
$$\frac{-1}{y} = \sin(t) + C$$
$$y = \frac{-1}{\sin(t) + C}$$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont $y(t) = \frac{-1}{\sin(t)+C}$ où C est une constante. D'après la condition initiale, $y(0) = 1$ donc $C = -1$. Ainsi la solution du problème à condition initiale est $y(t) = \frac{1}{1-\sin(t)}$.

Exercice 13: La population d'une certaine espèce de poissons d'un lac est actuellement estimée à 20000. Il y a trois ans, la population était de 18000. Supposons que la croissance de la population suit un modèle exponentiel. Quelle sera le nombre de poissons dans le lac dans 10 ans ?
Indication : Une fonction qui suit le modèle exponentiel est solution d'une équation de type $y' = ky$ ou k est une constante (cours du 4 octobre).
Réponse : On note $P(t)$ la population de poissons dans le lac à l'année t où $t = 0$ est maintenant. Alors les données de l'énoncé se traduisent par $P(0) = 20000$, $P(-3) = 18000$, et $P(t) = P(0)e^{kt}$ où k est une constante que la donnée de $P(-3)$ va nous permettre de déterminer : on écrit

$$P(-3) = P(0)e^{k(-3)}$$
$$e^{3k} = \frac{P(0)}{P(-3)} = \frac{20000}{18000} = \frac{10}{9}$$
$$e^k = \left(\frac{10}{9}\right)^{1/3}$$

Cette information est suffisante, en effet, on a

$$P(10) = P(0)e^{k10} = 20000 \times (e^k)^{10} = 20000 \times \left(\frac{10}{9}\right)^{10/3} \simeq 28415.$$

Donc il y aura environ 28415 poissons dans le lac dans 10 ans.

Exercice 14: Résoudre le problème à valeur initiale $y' = 6 - y - y^2$, $y(0) = 3$.
Indication : C'est une équation différentielle séparable (cours du 2 octobre).
Réponse : On reconnait une équation différentielle séparable (il n'y a pas de dépendance en la variable). Commençons par chercher les solutions stationnaires, ce sont les solutions (constantes) de l'équation $6 - y - y^2 = 0$ c'est à dire

$$y^2 + y - 6 = 0.$$

Le discriminant est $1 + 4 \times 6 = 25 = 5^2$, donc les solutions sont $y(t) = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $y(t) = \frac{-1+5}{2} = 2$. Ces solutions ne sont pas solution du problème à condition initiale $y(0) = 3$.

On sait donc que la solution que l'on cherche vérifie $6 - y - y^2 \neq 0$ et l'équation pour cette solution est équivalente à

$$\frac{dy}{6 - y - y^2} = dt.$$

Donc en prenant les primitives :

$$\int \frac{dy}{6 - y - y^2} = \int dt = t + C$$

où C est une constante. On a

$$\int \frac{dy}{6 - y - y^2} = -\int \frac{dy}{(y-2)(y+3)}$$

On procède à une décomposition en éléments simples, si

$$\frac{1}{(y-2)(y+3)} = \frac{a}{y-2} + \frac{b}{y+3} = \frac{(a+b)y + 3a - 2b}{(y-2)(y+3)}$$

alors $a = -b$ et $3a - 2b = 1$ donc $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{-1}{5}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{6 - y - y^2} &= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dy}{y+3} - \int \frac{dy}{y-2}\right) \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y+3}{y-2} \right|. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y+3}{y-2} \right| &= t + C \\ \left| \frac{y+3}{y-2} \right| &= Ke^{5t} \end{aligned}$$

où $K = e^{5C}$ est une constante positive. On enlève la valeur absolue :

$$\frac{y+3}{y-2} = \pm Ke^{5t} = ke^{5t}$$

où $k = \pm K$ est une constante non nulle. La condition initiale $y(0) = 3$ donne $k = 6$. On simplifie pour avoir y en fonction de t

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{y-2} &= 6e^{5t} \\ y + 3 &= 6e^{5t}(y-2) \\ (1 - 6e^{5t})y &= -12e^{5t} - 3. \end{aligned}$$

Finalement $y(t) = \frac{12e^5t+3}{6e^5t-1}$.

Exercice 15: Une cuve contient 500 gallons de bière à 4% d'alcool. On verse dedans de la bière à 6% d'alcool à la vitesse de 5 gallons par minute, et le mélange est pompé hors de la cuve à la même vitesse. Soit $Q(t)$ la quantité d'alcool dans la cuve en fonction du temps t. Donner un problème à conditions initial satisfait par $Q(t)$, puis le résoudre pour trouver $Q(t)$.
Indication : C'est un problème de mélange, donner la quantité d'alcool (en gallons) qu'il y a dans la cuve au début, combien en rajoute-t-on chaque minute ? combien en enlève-t-on chaque minute ? (cours du 4 octobre).
Réponse : On note $Q(t)$ la quantité (en gallons) d'alcool dans la cuve en fonction du temps (compté en minutes), on a $Q(0) = \frac{4}{100} \times 500 = 20$ gallons. On a

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{taux entrant}) \ - \ (\text{taux sortant})$$

Chaque minute il entre dans la cuve 5 gallons à 6% d'alcool, donc le taux d'alcool entrant est $5 \times \frac{6}{100} = \frac{3}{10}$. Chaque minute il sort de la cuve 5 gallons le mélange dont la concentration en alcool est $\frac{Q(t)}{500}$, donc le taux sortant est $5 \times \frac{Q(t)}{500} = \frac{Q(t)}{100}$. Ainsi l'équation différentielle satisfaite par la fonction $Q(t)$ est

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{3}{10} - \frac{Q(t)}{100}$$

On résout cette équation différentielle séparable en séparant les variables :

$$\begin{aligned} \int \frac{dQ}{30 - Q} &= \frac{1}{100} \int dt \\ -\ln|30 - Q| &= \frac{t}{100} + C \\ 30 - Q &= Ae^{-\frac{t}{100}} \\ Q(t) = 30 - Ae^{-\frac{t}{100}} \end{aligned}$$

où A est une constante.

On détermine la valeur de A grâce à la condition initiale $Q(0) = 20$:

$$\begin{aligned} 20 &= 30 - A \\ A &= 10 \end{aligned}$$

Finalement $Q(t) = 30 - 10e^{-0.01t}$.

Exercice 16: Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} - (-1)^n 5^{n+1}}{3^{2n}}$.
Indication : C'est une différence de séries géométriques (cours du 11 octobre).
Réponse : On reconnait des séries géométriques :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} - (-1)^n 5^{n+1}}{3^{2n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} - \frac{(-1)^n 5^{n+1}}{3^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{-5}{3^2}\right)^n . \end{aligned}$$

Ce sont bien deux séries géométriques, la première a premier terme 1 et raison $\frac{8}{9}$ (qui vérifie bien $\left|\frac{8}{9}\right| < 1$), et la seconde a premier terme 5 et raison $\frac{-5}{9}$ (qui vérifie bien $\left|\frac{-5}{9}\right| < 1$), donc ces deux séries sont convergentes, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} - (-1)^n 5^{n+1}}{3^{2n}} &= \frac{1}{1-\frac{8}{9}} - \frac{5}{1+\frac{5}{9}} \\ &= \frac{9}{9-8} - \frac{45}{9+5} = \frac{9 \times 14 - 45}{14} = \frac{81}{14}\end{aligned}$$

Exercice 17: Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.
Indication : Penser aux différents tests.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^3}$.

   Indication : Test de l'intégrale (cours du 18 octobre).

   Réponse : Soit $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^3}$, on a $S = \sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n)$ est $f(x)$ est une fonction positive décroissante, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$. On peut donc appliquer le test de l'intégrale : La série est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3}$ est convergente. On a

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-1}{2(\ln x)^2}\right]_2^t = \frac{1}{2(\ln 2)^2}.$$

   Donc l'intégrale est convergente, on en déduit que la série est convergente.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{n\sqrt{n}+1}$.

   Indication : Test de comparaison (cours du 18 octobre).

   Réponse : C'est une série à termes positifs. On va comparer la suite $\frac{2n-1}{n\sqrt{n}+1}$ avec la suite $\frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dont la série est divergente (car $1/2 < 1$, c'est une série de Riemann), on veut donc minorer notre suite. On a pour tout $n \geq 1$

$$2n - 1 \geq n \text{ et } n\sqrt{n} + 1 \leq 2n\sqrt{n}$$

   donc

$$\frac{2n-1}{n\sqrt{n}+1} \geq \frac{n}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0.$$

   La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ est divergente donc par test de comparaison, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{n\sqrt{n}+1}$ est aussi divergente.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin^2(n)}{2n^2\sqrt{n}-1}$.

   Indication : Test de comparaison (cours du 18 octobre).

Réponse : C'est une série à termes positifs. On va comparer la suite $\frac{n+\sin^2(n)}{2n^2\sqrt{n}-1}$ avec la suite $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ dont la série est convergente (car $3/2 > 1$, c'est une série de Riemann), on veut donc majorer notre suite. On a pour tout $n \geq 1$

$$n + \sin^2(n) \leq n + 1 \text{ et } 2n^2\sqrt{n} - 1 \geq n^2\sqrt{n}$$

donc

$$0 \leq \frac{n + \sin^2(n)}{2n^2\sqrt{n} - 1} \leq \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ sont convergentes, donc par test de comparaison la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin^2(n)}{2n^2\sqrt{n}-1}$ est convergente.

4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\sin(n)}{3n+1}$.

   Indication : Est-ce vraiment une série alternée ?

   Réponse : On a

$$\frac{n + \sin(n)}{3n + 1} = \frac{1 + \frac{\sin(n)}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{1}{3} \neq 0.$$

   Donc la suite $(-1)^n \frac{n+\sin(n)}{3n+1}$ ne tend pas vers 0, d'après le premier critère de divergence, la série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\sin(n)}{3n+1}$ est divergente.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$.

   Indication : Et celle-ci ? (cours du 30 octobre).

   Réponse : C'est une série alternée, en effet étudions la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{3x+1}$, $f(x)$ est à valeurs positives et tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}} - 3\sqrt{x+1}}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{3x + 1 - 6(x+1)}{2\sqrt{x+1}(3x+1)^2} = \frac{-3x - 5}{2\sqrt{x+1}(3x+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

   Donc la suite $b_n = f(n)$ est bien décroissante, à valeurs positives, de limite nul. On conclut grâce au critère des séries alternées que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$ est convergente.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

   Indication : Test du quotient, souvenez-vous de $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (cours du 30 octobre).

Réponse : On applique le test du quotient, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n} = \frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

On a besoin de calculer $\lim_{n\to\infty}\left(1+a\frac{1}{n}\right)^n$ pour $a=1,\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. On le fait en utilisant le logarithme :

$$\ln\left(\left(1+a\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+a\frac{1}{n}\right)$$

On utilise la série de MacLaurin de $\ln(1+X)$ (car quand $n\to\infty$, $\frac{1}{n}$ se rapproche de 0) On a $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \ldots$, donc

$$n\ln\left(1+a\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \ldots\right) = a + \frac{a^2}{2n} + \ldots \rightarrow_{\nLeftarrow\to\infty} a.$$

Finalement on a montré que $\lim_{n\to\infty}\left(1+a\frac{1}{n}\right)^n = e^a$. Donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2}e^1\frac{e^{1/2}}{e^{3/2}} = \frac{1}{2} < 1$$

Donc d'après le test du quotient, la série est convergente.

Exercice 18: Donner une borne supérieure et une borne inférieure pour la somme de la série $S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$.

Indication : Test de l'intégrale (cours du 18 octobre).

Réponse : Soit $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^3}$, on a $S = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ est $f(x)$ est une fonction positive décroissante, qui tend vers 0 quand $x\to+\infty$. On peut donc appliquer le test de l'intégrale, on a

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^3} + \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx$$

(faire le dessin des escaliers au dessus et en dessous du graphe de la fonction pour s'en convaincre). De plus

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{2(\ln x)^2}\right]_2^t \\
&= \frac{1}{2(\ln 2)^2} \simeq 1.04
\end{aligned}$$

et $\frac{1}{2(\ln 2)^3} \simeq 1.50$ Donc

$$1.04 \leq S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3} \leq 1.50 + 1.04 = 2.54$$

Remarque : Cet encadrement n'est pas très satisfaisant, une façon de l'améliorer est de calculer une somme partielle avec plus de termes et d'utiliser le test de l'intégrale pour le reste, par exemple on a

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3} dx \leq S \leq s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3} dx,$$

mais un tel travail n'était pas demandé ici.

Exercice 19:

Sachant que la somme partielle $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1} \simeq 0.8375$. Donner une borne supérieure et une borne inférieure pour la somme de la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$.

Indication : C'est une série alternée (cours du 30 octobre).

Réponse : C'est une série alternée, en effet étudions la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{3x+1}$, $f(x)$ est à valeurs positives et tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}} - 3\sqrt{x+1}}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{3x+1-6(x+1)}{2\sqrt{x+1}(3x+1)^2} = \frac{-3x-5}{2\sqrt{x+1}(3x+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $b_n = f(n)$ est bien décroissante, à valeurs positives, de limite nul.

Comme la série est alternée, les sommes partielles d'indice pair S_{2k} (dont le dernier terme vient avec un signe $+$) sont au dessus de la somme de la série S (et elles forment une suite décroissante qui tend vers S), et les sommes partielles d'indice impair S_{2k+1} (dont le dernier terme vient avec un signe $-$) sont en dessous de la valeur de la série (et elles forment une suite croissante qui tend vers S), en clair on a

$$S_{2k+1} < S < S_{2k}$$

pour tout k (Voir le dessin dans la preuve du critère des séries alternées). En particulier

$$S_{11} = S_{10} - \frac{\sqrt{12}}{34} \leq S \leq S_{10}$$

donc $0.8375 - \frac{\sqrt{12}}{34} \simeq 0.7359 < S < 0.8375$.

Exercice 20:

On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{2n}\sqrt{n}}$. Pour quelles valeurs de x cette série est-elle absolument convergente ? conditionnellement convergente ? divergente ?

Donner le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de cette série.

Indication : Utiliser de test du quotient pour trouver les endroits d'absolue convergence et de divergence, il reste les extrémités du domaine de convergence à traiter séparément (cours du 1 novembre).

Réponse : On commence par chercher le rayon de convergence de la série, pour cela on utilise le test du quotient pour $a_n = \frac{(x+3)^n}{2^{2n}\sqrt{n}}$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(x+3)^{n+1}}{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}\frac{2^{2n}\sqrt{n}}{(x+3)^n}\right| \\ &= \frac{|x+3|}{4}\sqrt{\frac{n+1}{n}}.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+3|}{4}$. Ainsi la série converge absolument pour $|x+3| < 4$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la série est 4 et que la série converge absolument pour x dans l'intervalle $]-7,1[$, et diverge sur $]-\infty,-7[$,et sur $]1,+\infty[$.

Il reste à déterminer ce qu'il se passe en -7 et en 1. En 1 la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4)^n}{2^{2n}\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

qui est divergente par critère de Riemann $(1/2 \leq 1)$.

En -7 la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{2^{2n}\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

qui n'est pas absolument convergente par critère de Riemann $(1/2 \leq 1)$, cependant elle est conditionnellement convergente, puisque c'est une série alternée, en effet $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive et décroissante vers 0.

Finalement, le domaine d'absolue convergence est l'intervalle $]-7,1[$, la série converge conditionnellement au point -7 est elle diverge partout ailleurs.

Exercice 21: On considère la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+2t^4}dt$.

1. Donner la série de MacLaurin de cette fonction.

   Indication : Utiliser la série de MacLaurin de $\frac{1}{1-x}$ et le théorème d'intégration des séries entières (cours du 6 novembre).

   Réponse : On sait que

   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

   pour $|x| < 1$. On remplace x par $(-2t^4)$ dans la formule au dessus :

   $$\frac{1}{1+2t^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2t^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n t^{4n}$$

   pour $|2t^4| < 1$, c'est-à-dire pour $|t|2^{-1/4}$.

D'après le théorème d'intégration des séries entières (l'intégrale de la série est la série des intégrales), pour $|x|2^{-1/4}$ on a

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n t^{4n} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \int_0^x t^{4n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n+1} x^{4n+1} \end{aligned}$$

2. Donner $f^{(9)}(0)$ et $f^{(10)}(0)$.
   Indication : Qu'est-ce qu'une série de MacLaurin ? (cours du 8 novembre).
   Réponse : Par la définition de la série de MacLaurin, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n+1} x^{4n+1}.$$

   Donc les coefficients devant x^9 sont égaux (et $4n+1 = 9$ pour $n = 2$) :

$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = \frac{(-2)^2}{4 \times 2 + 1}$$
$$f^{(9)}(0) = 9! \times \frac{4}{9} = 8! \times 4 = 161280.$$

   Et les coefficients devant x^{10} sont égaux, mais $4n+1$ n'est jamais égal à 10 pour n entier, donc

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = 0$$
$$f^{(10)}(0) = 0$$

Exercice 22:

1. Donner les quatre premier termes non-nuls de la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Indication : Utiliser la formule du binôme (cours du 13 novembre).
   Réponse : D'après la formule du binôme (composée avec $x \mapsto x^2$) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n} \\ &= 1 + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2} - 1\right)}{2} x^4 + \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2} - 1\right)\left(\frac{-1}{2} - 2\right)}{3 \times 2} x^6 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \dots \end{aligned}$$

   pour $|x| < 1$.

2. On rappelle que $\frac{d}{dx}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Donner les quatre premiers termes non-nuls de la série de MacLaurin de la fonction $g(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
   Indication : Utiliser le théorème d'intégration des séries entières (cours du 6 novembre).
   Réponse : On sait que $g(x)$ est la primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ qui vérifie $g(0) = 0$. D'après le théorème d'intégration des séries entières la primitive d'une série entière est la série des primitives :

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= \int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \dots\right) dx \\ &= C + x - \frac{1}{2\times 3}x^3 + \frac{3}{8\times 5}x^5 - \frac{5}{16\times 7}x^7 + \dots\end{aligned}$$

   Comme $g(0) = 0$, on a $C = 0$, ainsi

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \dots.$$

Exercice 23: Donner les dérivées partielles premières et secondes $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de la fonction $f(x, y) = x\ln(2y - x)$.
Indication : Pour calculer une dérivée partielle par rapport à x, on dérive la fonction par rapport à x en considérant les autres variables comme constantes (cours du 22 novembre).
Réponse :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \ln(2y-x) - \frac{x}{2y-x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x}{2y-x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{-1}{2y-x} - \frac{(2y-x)+x}{(2y-x)^2} = \frac{x-4y}{(2y-x)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2}{2y-x} + \frac{2x}{(2y-x)^2} = \frac{4y}{(2y-x)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4y}{(2y-x)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{-4x}{(2y-x)^2}\end{aligned}$$

Exercice 24: On considère la fonction $f(x, y) = x^2y - 3x^2 + y^2$.

1. Donner les dérivées partielles premières et secondes $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Indication : Pour calculer une dérivée partielle par rapport à x, on dérive la fonction par rapport à x en considérant les autres variables comme constantes (cours du 22 novembre).

Réponse :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 6x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 6$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

2. Donner le vecteur gradient de $f(x, y)$ au point $x = -1$, $y = 2$.
   Indication : (cours du 27 novembre).
   Réponse : Le vecteur gradient est $\nabla f(x, y) = (2xy - 6x, x^2 + 2y)$. Au point $x = -1$, $y = 2$ on trouve $\nabla f(-1, 2) = (-4 + 6, 1 + 4) = (2, 5)$.
3. Donner la dérivée directionnelle de $f(x, y)$ au point $(-1, 2)$ dans la direction de $\mathbf{v} = (4, -3)$.
   Indication : Il ne faut pas oublier de normaliser le vecteur (cours du 6 décembre).
   Réponse : La norme du vecteur $\mathbf{v} = (4, -3)$ est $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Donc le vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{v}$ est $\mathbf{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$. La dérivée directionnelle de $f(x, y)$ au point $x = -1$, $y = 2$ dans la direction de $\mathbf{v}$ est donc

$$f'_{\mathbf{u}} = \nabla f(-1, 2) \cdot \mathbf{u} = 2 \times \frac{4}{5} + 5 \times \frac{-3}{5} = \frac{-7}{5}.$$

4. Donner l'équation du plan tangent au graphe de la fonction au point $(-1, 2, f(-1, 2))$.
   Indication : (cours du 27 novembre).
   Réponse : On a $f(-1, 2) = 2 - 3 + 4 = 3$. l'équation du plan tangent au graphe de la fonction au point $(-1, 2, 3)$ est

$$z = 3 + 2(x + 1) + 5(y - 2)$$

que l'on peut simplifier en

$$2x + 5y - z - 5 = 0.$$

Exercice 25: Soit $z = f(x,y)$ avec $x = g(u,v)$ et $y = h(u,v)$. Alors $z = f\left(g(u,v), h(u,v)\right) = F(u,v)$ est une fonction de u et v. On suppose que les valeurs suivantes sont connues :

$$\begin{gathered} f(1,2) = 3, f'_x(1,2) = 5, f'_y(1,2) = -2, \\ g(3,5) = 1, g'_u(3,5) = 2, g'_v(3,5) = -1, \\ h(3,5) = 2, h'_u(3,5) = 4, h'_v(3,5) = -3. \end{gathered}$$

Donner les valeurs de F'_u et F'_v au point $u = 3$, $v = 5$.
Indication : écrire la composition des dérivées (cours du 29 novembre).
Réponse : D'après la formule de composition des dérivées, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

Au point $u = 3, v = 5$, on a d'après les données $x = g(3,5) = 1$, $y = h(3,5) = 2$, donc

$$\begin{aligned} F'_u(3,5) &= f'_x(1,2) \times g'_u(3,5) + f'_y(1,2) \times h'_u(3,5) = 5 \times 2 + (-2) \times 4 = 2 \\ F'_v(3,5) &= f'_x(1,2) \times g'_v(3,5) + f'_y(1,2) \times h'_v(3,5) = 5 \times (-1) + (-2) \times (-3) = 1. \end{aligned}$$

Exercice 26: On considère la fonction $z = f(x,y)$ définie implicitement par l'équation $x^2z + xy - yz^3 = -1$.

1. Donner le vecteur gradient de la fonction $z = f(x,y)$ au point $(2,1,-1)$.
   Indication : Pour calculer une dérivée partielle par rapport à x, on dérive la fonction par rapport à x en considérant les autres variables comme constantes, ici on est dans le cas d'une fonction définie implicitement (cours du 4 décembre).
   Réponse : La fonction $z = f(x,y)$ est définie implicitement par l'équation $F(x,y,z) = 0$ pour $F(x,y,z) = x^2z + xy - yz^3 + 1$. On vérifie que

   $$F(2,1,-1) = 4 \times (-1) + 2 \times 1 - 1 \times (-1)^3 + 1 = 0$$

   donc $f(2,1) = -1$ est possible. Calculons la dérivée partielle de $F(x,y,z)$ par rapport à z :

   $$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^2 - 3yz^2.$$

   Donc $\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,-1) = 4 - 3 = 1 \neq 0$, ainsi au moins assez proche du point $(2,1,-1)$ l'équation $F(x,y,z) = 0$ définit bien z comme une fonction implicite de x et y.

Le vecteur gradient de la fonction $z = f(x, y)$ est le vecteur qui a pour coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. D'après la formule de la dérivation des fonctions définies implicitement, il nous faut calculer les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, z)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xz + y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x - z^3.$$

Et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{-2xz - y}{x^2 - 3yz^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{-x + z^3}{x^2 - 3yz^2}.$$

Évalué au point $x = 2, y = 1, z = -1$, cela donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{4 - 1}{1} = 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2 - 1}{1} = -3.$$

Ainsi la vecteur gradient de la fonction $f(x, y)$ au point $(2, 1, -1)$ est $(3, -3)$.

2. Donner l'équation du plan tangent au graphe de la fonction au point $(2, 1, -1)$.
   Indication : (cours du 27 novembre).
   Réponse : Une fois qu'on a le vecteur gradient au point, l'équation du plan tangent en ce point est donné immédiatement, ici c'est

   $$z = -1 + 3(x - 2) - 3(y - 1)$$

   que l'on peut simplifier en

   $$3x - 3y - z - 4 = 0.$$

3. Donner la dérivée directionnelle de cette fonction au point $(2, 1, -1)$, dans la direction du vecteur $\mathbf{v} = (2, -3)$.
   Indication : Il ne faut pas oublier de normaliser le vecteur (cours du 6 décembre).
   Réponse : La norme du vecteur $\mathbf{v} = (2, -3)$ est $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, donc le vecteur unitaire de même direction que le vecteur $\mathbf{v}$ est $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$. La dérivée directionnelle dans la direction du vecteur $\mathbf{u}$ est

   $$f'_{\mathbf{u}}(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{u} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{13}} + (-3) \times \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{15}{\sqrt{13}}.$$

4. Trouver la valeur maximale de la dérivée directionnelle au point $(2, 1, -1)$ parmi toutes les directions possibles.
   Indication : (cours du 6 décembre).
   Réponse : La direction dans laquelle la dérivée directionnelle est maximale est celle du vecteur gradient, la valeur maximale est la norme du vecteur gradient : $\|(3, -3)\| = 3\sqrt{2}$.