Study Sheets for Math

Soluing Methods for Diff. Eq.

Équation separable d'ordre 1

1. Sépare x et y et ensuite intègre chaque côté

Ex: $y' \sec^2(x) = y\ln(y)$

*remember $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{y'}{y\ln(y)} = \frac{1}{\sec^2 x} \iff \frac{dy}{y\ln(y)} = \cos^2 x \, dx$$

$$\ln y = De^{x/2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

Équation homogène non séparable

$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0$

1. Check $G(rx, ry) \longrightarrow$ Ex: $G(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad G(rx,ry) = r^2x^2 - r$
2. Substitution de $y = ux$ <u>ou</u> $x = uy$
3. Trouve dérivé $dy = x\,du + u\,dx$ et substitue dy
4. Sépare u de x ou y
5. remplace u avec valeur initiale

Ex: $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$

$M(x,y) = x + 2y \qquad N(x,y) = -x$

$y = ux \qquad dy = x\,du + u\,dx$

$$\int \frac{du}{(1+u)} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \left.\begin{aligned} u &= Dx - 1 \\ u &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} y = Dx^2 - x$$

Équations différentielles exacte

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ Mais $M(rx,ry)$ PAS homogène

1. Trouve M_y (ou M_x) et N_x (ou N_y)
2. $M_y = N_x$
3. $F(x,y) = \int M\,dx$ ou $\int N\,dy$ (add $+ g(y)$ or $+ g(x)$)
4. $F_y = N$ ou $F_x = M$
5. Eliminate to find $g'(y)$ or $g'(x)$
6. Integrate to find $g(y)$ or $g(x)$
7. Make $F(x,y) = K$

$$F(x,y) = \begin{cases} \int M\,dx \rightarrow F_y = N \\ \int N\,dy \rightarrow F_x = M \end{cases}$$

Équation différentielles NON exactes

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ MAIS $M_y \neq N_x$

1. Trouve facteur d'intégration

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$$

$\hookrightarrow u = e^{\int f(x)dx}$ $\quad$ $\hookrightarrow u = e^{-\int g(y)dy}$

2. Multiplie le u à $M(x,y)$ et $N(x,y)$
3. $M^*(x,y) = N^*(x,y)$
4. If divided by N need to find $F(x,y) = \int N^*\,dy$
5. Continue as exacte

Équation linéaire d'ordre 1

$$y' + f(x)\,y = r(x)$$

① Identifie $f(x)$ et $r(x)$

② Trouve $u = e^{\int f(x)dx}$

③ Trouve $y = \dfrac{\int u\,r(x)}{u}$

Équation de Bernoulli

$$y' + p(x)\,y = y^{a} \cdot g(x)$$

① Identifie $p(x)$, $g(x)$ et a

② $u = y^{1-a}$

③ Réécrire l'équation avec u $\rightarrow$ $u' + \underbrace{(1-a)p(x)}_{f(x)}\,u = \underbrace{(1-a)g(x)}_{r(x)}$

④ Refaire comme équation linéaire avec u

⑤ Substitue u avec valeur original

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0$$

① Écrire l'équation caractéristique $\rightarrow$ $\lambda^2 + f(x)\lambda + g(x) = 0$

② Trouve λ_1 et λ_2

CAS 1 :

λ_1 et λ_2 sont deux racines réelles distinctes

$\therefore\; y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

CAS 2 :

λ_1 et λ_2 sont deux racines complex $(\lambda = \alpha + i\beta)$

$\therefore\; y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

CAS 3

λ_1 et λ_2 sont une racine double $(\lambda_1 = \lambda_2)$

$\therefore\ y = C_1 e^{\lambda x} + C_2\, x e^{\lambda x}$

Équations Euler - Cauchy

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \ , \quad x > 0$$

1. remplace avec $m^2 + (a_1 - 1) m + a_2 = 0$
2. Trouve m_1 et m_2

CAS 1

m_1 et m_2 sont deux racines réelle distincte

$\therefore\ y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$

CAS 2

m_1 et m_2 sont deux racines complexe $(\alpha + \beta i)$

$\therefore\ y = C_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)) + C_2\, x^{\alpha} \sin(\beta \ln(x))$

CAS 3

m_1 et m_2 sont une racine double $(\lambda_1 = \lambda_2)$

$\therefore\ y = C_1 x^{\lambda} + C_2 x^{\lambda} \ln(x)$

Équations d'ordre quelconque homogène

$y^{(n)} + f_{n+1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$

1. Équation caractérisque avec λ
2. Trouve les racines

CAS 1

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\therefore\ y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

CAS 2

λ_1 et λ_2 sont deux racines imaginaires avec λ_3, λ_4 réelle

$\therefore\ y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

CAS 3

Si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_3 = \bar{\lambda}$ (4 racines imaginaire multiple)

$\therefore\ y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_3 x e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 x e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

CAS 4

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (racine réelle multiple)

$\therefore\ y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_3 x}$

Équation d'Euler-Cauchy avec $n=3$ homogène

$$x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0, \quad x>0$$

① Remplace avec $m(m-1)(m-2) + a_2m(m-1) + a_1m + a_0 = 0$

② Trouve racines

Suivre même CAS pour équation avec $n<3$

Équation linéaire non-homogène

$$Ly = (D^n + f_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + f_1(x)D + f_0(x))y = r(x)$$

① Méthode des variations des paramètres

① Trouve l'équation caractéristique avec racine

② Trouve la solution homogène

③ Trouve la solution particulière ($y_p = u_1y + u_2y_2$)

① $n=2$

$\hookrightarrow W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{-r(x)}{W} \cdot y_2 \\ u_2' = \dfrac{r(x)}{W} \cdot y_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} u_1 = \int u_1' \, dx \\ u_2 = \int u_2' \, dx \end{matrix}$$

② $n=3$

$\hookrightarrow W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{r(x)}{W} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix} \\ u_2' = \dfrac{-r(x)}{W} \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix} \\ u_3' = \dfrac{r(x)}{W} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} u_1 = \int u_1' \, dx \\ u_2 = \int u_2' \, dx \\ u_3 = \int u_3' \, dx \end{matrix}$$

④ Trouve $y_G = y_h + y_p$

② Méthode des coefficients indéterminé

① Vérifier que les dérivés de $r(x)$ sont finie
② Trouve équation caractéristique avec racine
③ Trouve solution homogène
④ Trouve solution particulière

↳ trouve la base avec toute les dérivés
↳ n'oublie pas le mode si besoins!

↳ écrire $y_p = b_1 r(x)_1 + b_2 r(x)_2 + \dots + b_n r(x)_n$

↳ trouve y'_p et y''_p (y'''_p si $n=3$)

↳ trouve les valeurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ en remplaçant y''_p, y'_p et y_p dans l'équation original $= r(x)$
↳ factorise pour que les coefficient $= 0$

⑤ La solution général $= y_p + y_h$

Équation d'Euler-Cauchy non-homogène

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = P(x) \quad x > 0$$

① Normalise l'équation en divisant le x^n à toute l'équation
② Continue avec étape comme Euler-Cauchy pour l'équation homo
③ Utilise soit la méthode des variations des paramètres ou la méthode des coefficients indéterminé pour y_p avec le nouveau $r(x)$ qui est normalisé
* might only be able to use variation des paramètres NOT SURE*