Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 C – Test 3 – V.A

Professeur : Abdelkrim El basraoui

12 novembre 2015

Nom : Solution

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Réponse choix multiples →	1	A
	2	F
	3	C
Pour le correcteur →	4	
	5	
	6	
	[Bonus] 7	
	Total	

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de calculatrice, téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **n'est pas permise.**
- Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. **Répondez à toutes les questions dans l'espace fourni après chaque question**. Pour les questions 4 à 7, vous pouvez utiliser l'endos des pages si vous en avez besoin, par contre n'oubliez pas de l'indiquer pour le correcteur.
- Les questions 1 à 3 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y aura aucun point partiel. Vous devez écrire votre réponse dans le tableau fourni ci-dessus.
- Les questions 4 et 6 valent 6 points chacune. **Les bonnes réponses pour ces questions doivent être justifiées et écrites de façon logique et lisible; vous devez convaincre le correcteur que vous savez pourquoi votre réponse est la bonne.** La Question 7 est une question bonus qui vaut 3 points.
- Lorsque vous le pouvez, il est fortement recommandé de vérifier votre travail.

Bonne Chance!

1. Soit A la matrice des coéfficients d'un système linéaire homogène de 16 équations et 20 variables.
Si le rang de A est égale à 10, combien de paramètres y aura-t-il dans la solution générale?

A. 10
B. 6
C. 4
D. 0
E. 16
F. 20

paramètres $=$ # variables libres
$=$ # variables $-\ rg(A)$
$= 20 - 10 = 10$ (A)

2. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et soit B une matrice de type $3 \times n$. Alors la troisième ligne de la matrice (produit) AB est

Si $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \end{bmatrix}$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{11}+b_{21}+b_{31} & b_{12}+b_{22}+b_{32} & \cdots & b_{1n}+b_{2n}+b_{3n} \\ b_{21}+b_{31} & b_{22}+b_{32} & \cdots & b_{2n}+b_{3n} \end{bmatrix}$$

A. la même que la deuxième ligne de A
B. la même que la première ligne de B
C. la même que la deuxième ligne de B
D. la somme de la première et deuxième ligne de B
E. la somme de la première et troisième ligne de B
F. la somme de la deuxième et troisième ligne de B

Donc la réponse est F

3. Trouvez toutes les valeurs de t pour lesquelles $(1,2,3,t)$ est une combinaison linéaire de $(1,0,1,2),(0,1,1,2)$ et $(1,1,0,2)$. Ceci se réalisera quand le système dont la M.A est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & t \end{array}\right]$ est compatible.

A. $t = 4$ ou 6
B. $t = 4$ seulement
C. $t = 6$ seulement
D. $t = -2$ ou -4
E. $t = 0$ ou 2
F. $t = -2$, 0 ou 4

On trouve donc la M.E. de cette M.A.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & t \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & t-2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_2]{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t-6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 - \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-6 \end{array}\right].$$

Donc ce système est compatible quand $t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{t = 6}$. (C)

4. Supposons que $e, f \in \mathbb{R}$ et considérons le système linéare en x, y et z suivant:

$$\begin{cases} 2x - 2y + ez = f \\ x + z = -1 \\ 3x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

a) Si $[A\,|\,b]$ est la matrice augmentée de ce systéme, trouvez $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}([A\,|\,b])$ pour <u>toutes les valeurs</u> de e et f. On trouve la M.E. de $[A|b]$.

On a : $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & e & f \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & e & f \\ 0 & 1 & 1-\frac{e}{2} & -1-\frac{f}{2} \\ 0 & 4 & 2-\frac{3}{2}e & -2-\frac{3}{2}f \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & e & f \\ 0 & 1 & 1-e/2 & -1-f/2 \\ 0 & 0 & -2+\frac{e}{2} & 2+\frac{f}{2} \end{array}\right]$ qui la M.E.

Donc :
- $\text{rg}(A) = 3 \iff \left(-2+\frac{e}{2} \neq 0 \iff e \neq 4\right)$
- $\text{rg}(A) = 2 \iff \left(-2+\frac{e}{2} = 0 \iff e = 4\right)$
- $\text{rg}([A|b]) = 3 \iff \left[\left(-2+\frac{e}{2} \neq 0 \iff e \neq 4\right)\right.$ et f quelconque
- $\text{rg}([A|b]) = 3 \iff \left[\left(-2+\frac{e}{2} = 0 \iff e = 4\right)\right.$ et $\left(2+\frac{f}{2} \neq 0 \iff f \neq -4\right)$
- $\text{rg}([A|b]) = 2 \iff \left[\left(-2+\frac{e}{2} = 0 \iff e = 4\right)\right.$ et $\left(2+\frac{f}{2} = 0 \iff f = -4\right)$

(Voir la prochaine page pour Q.4 parties (b) et (c).)

b) En utilisiant (a), trouvez toutes les valeurs de e et f tels que le système admet

(i) une solution unique : dans ce cas $rg(A) = rg([A|b]) = \#$ variables $= 3$.

Donc : $e \neq 4$ et f quelconque.

(ii) une infinité de solutions : ici $rg(A) = rg([A|b]) < \#$ variables.

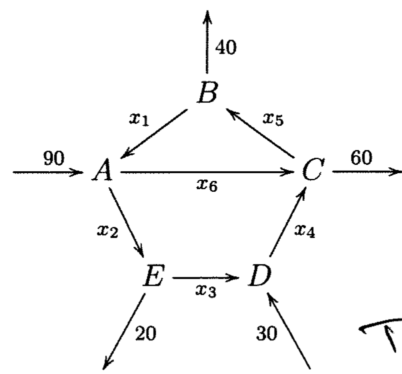
Donc $e = 4$ et $f = -4$.

(iii) acune solution (incompatible) : $rg(A) < rg([A|b])$ dans ce cas.

Donc $e = 4$ et $f \neq -4$.

c) Dans le cas d'une infinité de solutions (comme dans b)(ii)) donnez une interprétation géométrique de la solution générale. Dans ce cas on a : $rg(A) = rg([A|b]) = 2$ et donc on a une variable libre. La sln générale représente donc une droite.

5. Considérez le réseau routier avec intersections A, B, C, D et E ci-bas. Les flèches indiquent la direction du traffic qui se fait en une seule direction. Les chiffres et les variables x_i donnent le nombre de véhicules qui entrent ou sortent par les intersections A, B, C, D et E par minute.



Noeud	Flux Entrant	Flux Sortant
A	x_1+90	x_2+x_6
B	x_5	x_1+40
C	x_4+x_6	x_5+60
D	x_3+30	x_4
E	x_2	x_3+20
Total	$90+30$	$40+60+2$

a) Donnez le système linéaire qui représente ce réseau.

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_6 = 90 \\ -x_1+x_5 = 40 \\ x_4-x_5+x_6 = 60 \\ -x_3+x_4 = 30 \\ x_2-x_3 = 20 \\ 120 = 120 \end{cases} \leftarrow \text{Total}$$

Contraintes sur les variables : $x_i \geq 0$, i=1,...,6

b) Si la matrice **échelonnée réduite** de la matrice augmentée du systéme dans la partie (a) est

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

écrivez la solution générale du systéme.

Les variables de base sont x_1, x_2, x_3 et x_4 et les variables libres sont x_5 et x_6. La sln générale est donc

$$\begin{cases} x_1 = x_5 - 40 \\ x_2 = x_5 - x_6 + 50 \\ x_3 = x_5 - x_6 + 30 \\ x_4 = x_5 - x_6 + 60 \\ x_5 \text{ libre} \\ x_6 \text{ libre.} \end{cases}$$

c) Si, dû à des travaux, on ferme la route ED, trouvez le flux minimal le long de la route AC. Justifiez votre réponse.

Si on ferme la route ED alors $x_3 = 0 \iff x_5 - x_6 + 30 = 0$

$\iff x_6 = x_5 + 30$.

Le flux le long AC est minimal quand x_6 est minimale.

$\iff x_5$ est minimale.

Mais, comme $x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$, on a $x_1 = x_5 - 40 \geq 0$

$\iff x_5 \geq 40$. Donc la valeur minimale de x_5 est 40.

D'où le flux minimal le long AC est de $x_6 = 40 + 30 = 70$ voitures/minute.

6. Indiquer si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case donnée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple!**
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Le noyau, Nul(A), de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est de dimension 1.

dim Nul(A) = # variables libres = # colonnes de A − rg(A)
= 1 = 3 − 2

RÉPONSE : Vrai

b) Un système linéaire incompatible ne peut être homogène.

Car les systèmes linéaires homogène sont toujours compatible avec au moins une solution (à savoir : la sln triviale).

RÉPONSE : Vrai

6 (suite).

c) Si A est une matrice d'ordre 2 telle que $A^2 = 0$, alors $A = 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mais

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

RÉPONSE : Faux

d) Si la matrice échelonnée de la matrice des coéfficients d'un système linéaire en deux équations et trois variables a une ligne de zéros, alors ce système admet une infinité de solutions.

Le système dont la M.A. est $[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

à pour matrice de coefficients $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui a une ligne de zéros, cependant ce syst. est incompatible.

RÉPONSE : Faux

7. [Bonus] Supposez que A est une matrice non-nulle d'ordre 3 telle que $A^T = -A$. Montrez que $\mathrm{rg}(A) = 2$.
Vous devez montrez ceci pour toutes les matrices non-nulles d'ordre 3. Un exemple particulier n'est pas suffisant.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$A^T = -A \iff \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = e = i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}$$

Donc A à la forme $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix}$.

Aussi $A \neq 0 \iff b \neq 0$ ou $c \neq 0$ ou $f \neq 0$.

- **Si $b \neq 0$:** On a : $A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -b & 0 & f \\ 0 & b & c \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{c}{b} L_1}$

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & c \\ 0 & b & c \\ 0 & -f & -\frac{fc}{b} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{f}{b} L_2} \begin{bmatrix} -b & 0 & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ est la M.E.

Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

- **Si $c \neq 0$:** ici on suppose que $b = 0$ (car si $b \neq 0$ c'est le cas précédent). Donc $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -c & -f & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -c & -f & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{f}{c} L_2} \begin{bmatrix} -c & -f & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ est la M.E.

Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ dans ce cas aussi.

- **Si $f \neq 0$:** on peut supposer que $b = 0$ et $c = 0$ (car $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ est l'une des situations précédentes).

Donc : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & -f & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & -f & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est la M.E.

Dans cas aussi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Conclusion : Toute matrice $A \neq 0$ telle que $A^T = -A$ a un rang 2.