Faculté des sciences »
Département de mathématiques et de statistique

MAT 1741 A – Test 1 – Diagnostique - V1

Le 14 septembre 2017. Durée: 80 minutes.
Professeur: Abdelkrim El basraoui.

Nom de famille:______________________ Prénom:________________________

Numéro d'étudiant(e):____________________

VEUILLEZ LIRE CES INSTRUCTIONS TRÈS ATTENTIVEMENT:

- Vous avez 80 minutes pour écrire cet examen.
- Cet examen est un examen à **livres fermés**.
- Les calculatrices **ne sont pas permises.**
- **Ne pas détacher** ce livret.
- Toutes les questions sont à choix multiples. Elles valent 1 point chacune et il n'y a pas de crédit partiel. Veuillez **inscrire vos réponses** dans le tableau à la deuxième page.
- Un tableau de valeur de fonctions trigonométriques (pour vous aider) se trouve à la deuxième page.
- Il est interdit de se servir de vos appareils électroniques. Vous devez les étteindre et les ranger dans votre sac: vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.
- Bonne chance!!!

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ______________________________

Veuillez inscrire vos réponses dans ce tableau.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Total	

Tableau de valeurs des fonctions trigonométriques

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

1. Trouvez l'équation du plan passant par les points $(1,-2,2)$ et (2,0,3) et parallèle à l'axes des y.

$\boxed{\text{A}}$ $-x+z=1$
$\boxed{\text{B}}$ $y-z=-1$
$\boxed{\text{C}}$ $y-z=2$
$\boxed{\text{D}}$ $2x-z=3$
$\boxed{\text{E}}$ $x+y+z=2$
$\boxed{\text{F}}$ $-2x+y=-3$

Solution: Ce plan est parallèle aux vecteurs $(2,0,3)-(1,-2,2)=(1,2,1)$ et $(0,1,0)$. Donc un vecteur normal est

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

et on a l'équation cartésienne $-x+z=d$. Pour trouver d on utilise l'un des points donné. Par exemple, $(2,0,3)$ donne d=1, soit la réponse $\boxed{\text{A}}$.

2. Considérez la droite L passant par les points $(-1,1,0)$ et $(-2,1,-1)$. Trouvez le point d'intersection de L avec le plan $x+y-2z=1$.

$\boxed{\text{A}}$ $(2/3,-1/3,1/3)$
$\boxed{\text{B}}$ $(-2,1,-1)$
$\boxed{\text{C}}$ $(0,1,1)$
$\boxed{\text{D}}$ $(1,-2,0)$

$\boxed{\text{E}}$ $(1,1,0)$
$\boxed{\text{F}}$ $(0,1,-1)$

Solution: Un vecteur directeur de L est $(-1,1,0)-(-2,1,-1)=(1,0,1)$. Donc les équations paramétriques de L sont

$$x=-1+t,\quad y=1,\quad z=t,\quad t\in\mathbb{R}.$$

On substitue $x,\ y$ et z dans

$$x-y+z=1 \iff -1+t+1+2t=1 \iff t=-1.$$

Soit le point d'intersection $(x,y,z)=(-2,1,-1)$ de la réponse $\boxed{\text{B}}$.

3. Trouvez l'équation du plan passant par le point $(3,2,1)$ et perpendiculaire à la droite avec équations paramétriques:

$$x = 1+t, \quad y = 1-2t, \quad z = -1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{A}}$ $-2y+z=1$
$\boxed{\text{B}}$ $x-2y=-1$
$\boxed{\text{C}}$ $2x-2y+z=-1$
$\boxed{\text{D}}$ $-x+2y+z=-2$
$\boxed{\text{E}}$ $2x-4y+z=1$
$\boxed{\text{F}}$ $2x-y-4z=1$

Solution: Un vecteur normal est donc le vecteur directeur de cette droite, soit $(1,-2,0)$. Donc on a l'équation $x-2y=d$. Pour trouver d, on utilise le point $(3,2,1)$ et la réponse est $\boxed{\text{B}}$.

4. L'équation paramétrique de la droite passant par le point $(-1,\ 3,\ 4)$ et parallèle aux plans $x-y+z=2017$ et $3x-2y-z=1741$ est:

$\boxed{\text{A}}$ Une telle droite n'existe pas.
$\boxed{\text{B}}$ $x=-1+3t,\ y=3+4t,\ z=4+t;\ t\in\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{C}}$ $x=1-3t,\ y=4-3t,\ z=1+4t;\ t\in\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{D}}$ $x=-1-2t,\ y=3+4t,\ z=4+t;\ t\in\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{E}}$ $x=-1-6t,\ y=3+t,\ z=4+5t;\ t\in\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{F}}$ $x=2+6t,\ y=-1-t,\ z=2-3t;\ t\in\mathbb{R}$.

Solution: Un vecteur directeur $\vec{d}$ est perpendiculaire aux vecteurs normaux de ces plans. On a donc

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3,4,1)$$

qui est le vecteur directeur de la droite en $\boxed{\text{B}}$ et qui aussi contient le point $(-1,3,4)$.

5. Trouvez l'équation cartésienne du le plan avec équation paramétrique vectorielle

$$\vec{x} = (1,-1,-3) + s(0,1,2) + t(1,2,3); s,t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{A}}$ $x+y+2z=-1$
$\boxed{\text{B}}$ $-4x+2y+z=-2$
$\boxed{\text{C}}$ $x-4y+4z=0$
$\boxed{\text{D}}$ $x+2y-z=-1$
$\boxed{\text{E}}$ $-x+2y-z=0$
$\boxed{\text{F}}$ $-2x+2y+4z=-1$

Solution: Un vecteur normal est

$$(0,1,2)\times(1,2,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$$

la seule équation avec vecteur normal est $\boxed{\text{E}}$. Notez qu'on peut vérifier que ce plan contient le point $(1,-1,-3)$.

6. L'ensemble de **tous** les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont perpendiculaires à $(1,2,3)$ et à $(-1,0,3)$ est:

$\boxed{\text{A}}$ $\{(-12,\ 3,\ 2)\}$
$\boxed{\text{B}}$ $\{(-12+t,\ t+3,\ t+2) |\ t \in \mathbb{R}\}$
$\boxed{\text{C}}$ $\{(0,\ t,\ 0) |\ t \in \mathbb{R}\}$
$\boxed{\text{D}}$ $\{(3t,\ -3t,\ t) |\ t \in \mathbb{R}\}$
$\boxed{\text{E}}$ $\{(0,\ 0,\ 0)\}$

$\boxed{\text{F}}$ $\{(12,\ 3,\ 4)\}$

Solution: Tous vecteur perpendiculaires à ces deux vecteurs est parallèle au vecteur $(1,2,3)\times(-1,0,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,-6,2) = 2(3,-3,1)$ et donc seul **tous** les vecteurs de (D) $(3t,\ -3t,\ t) = t(3,-3,1)$ sont perpendiculaires à ces deux vecteurs en même temps.

7. L'angle entre les vecteurs $u = (-1,\ 0,\ 1)$ et $v = (0,\ 0,\ 2)$ est:

$\boxed{\text{A}}$ $\pi/7$
$\boxed{\text{B}}$ $\pi/6$
$\boxed{\text{C}}$ $\pi/5$
$\boxed{\text{D}}$ $\pi/4$
$\boxed{\text{E}}$ $\pi/3$
$\boxed{\text{F}}$ $\pi/2$

Solution: On a

$$\cos(\theta) = \frac{u\cdot v}{||u||||v||} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $\theta = \pi/4$ et on a la réponse $\boxed{\text{D}}$.

8. La projection orthogonale, $\mathrm{proj}_u v$, de $v = (-1,\ -1,\ 1)$ sur $u = (0,\ 2,\ 1)$ est:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\frac{1}{5},\ 1,\ -\frac{8}{5})$
$\boxed{\text{B}}$ $(\frac{1}{5},\ -1,\ \frac{8}{5})$
$\boxed{\text{C}}$ $(0,\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{5})$
$\boxed{\text{D}}$ $(\frac{2}{5},\ 0,\ -\frac{1}{5})$
$\boxed{\text{E}}$ $(-1,\ 0,\ -2)$
$\boxed{\text{F}}$ $(1,\ -5,\ -\frac{8}{5})$

Solution: On a

$$proj_u v = \frac{v \cdot u}{||u||^2} u = \frac{-1}{5}(0,2,1).$$

Donc la réponse est $\boxed{\text{C}}$.

9. Le volume du parallélépipède avec sommet à l'origine et donné par les vecteurs $u = (1,2,-1)$, $v = (0,3,2)$ et $w = (0,0,1)$ est:

- $\boxed{\text{A}}$ 3
- $\boxed{\text{B}}$ 4
- $\boxed{\text{C}}$ 6
- $\boxed{\text{D}}$ 9
- $\boxed{\text{E}}$ 12
- $\boxed{\text{F}}$ 18

Solution: On a

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,0,0).$$

Hence, the volume is

$$|u \cdot (v \times w)| = |(1,2,-1) \cdot (3,0,0)| = 3.$$

La réponse est donc $\boxed{\text{A}}$.

10. Trouvez l'aire du triangle dont les sommets sont $A = (1,-1,1)$, $B = (1,2,-1)$ et $C = (0,0,1)$.

- $\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{18}$
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{17}}{2}$
- $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{15}$

$\boxed{\text{E}}$ 3

$\boxed{\text{F}}$ $2\sqrt{3}$

Solution: L'aire est égale à

$$\frac{1}{2}||\vec{AB}\times\vec{AC}||.$$

Donc avec

$$||\vec{AB}\times\vec{AC}|| = ||\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}|| = ||(2,2,3)|| = \sqrt{17}$$

la réponse est $\boxed{\text{c}}$.

Page supplémentaire pour vos brouillons - v1.