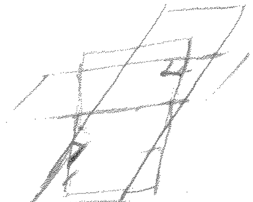
*Veuillez inscrire vos réponses dans ce tableau.*

| | |
|---|---|
| 1 | F |
| 2 | B |
| 3 | B |
| 4 | E |
| 5 | C |
| 6 | C |
| 7 | C |
| 8 | D |
| 9 | A |
| 10 | F |
| 11 | B |
| 12 | F |
| Total | |

V. 1

*Tableau de valeurs des fonctions trigonométriques*

| $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |



**1.** L'équation cartésienne du plan contenant le point $(2, 4, 3)$ et qui est perpendiculaire aux plans d'équations cartésiennes $x + 2y - z = 1$ et $3x - 4y = 2$ est:

A. $4x - 3y + 10z = -50$

B. $4x + 3y - 10z = 50$

C. $4x - 3y + 10z = 50$

D. $-4x + 3y + 10z = 50$

E. $4x + 3y + 10z = -50$

$\boxed{\text{F. } 4x + 3y + 10z = 50}$

Si $\vec{n_1} = (1, 2, -1)$ et $\vec{n_2} = (3, -4, 0)$ sont les vecteurs normaux à ces 2 plans alors $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$ est normal au plan en question.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-4, -3, -10)$$

Donc ce plan a pour équation $-4x - 3y - 10z = d$

Pour trouver $d$ on utilise le pt $(2, 4, 3)$. On a :

$-4(2) - 3(4) - 10(3) = d \iff d = -50$

Donc on a l'équation $-4x - 3y - 10z = -50$

$\iff \boxed{4x + 3y + 10z = 50}$

N.B. Les deux plans $x + 2y - z = 1$ et $3x - 4y = 2$ ne sont pas //

**2.** L'équation du plan contenant les points $(\underset{A}{2, 1, -1})$ et $(\underset{B}{3, 2, 1})$ et qui est parallèle à l'axe des $y$ est:

A. $x + y - z = 4$

$\boxed{\text{B. } 2y - z = 5}$

C. $2x - y = 5$

D. $2x - z = 5$

E. $2x + z = 5$

F. $2y - z = -5$

Soit $\vec{u} = \vec{AB} = (1, 1, 2)$

Alors $\vec{u}$ et $\vec{j} = (0, 1, 0)$ engendrent ce plan.

Le vecteur normal est

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1)$$

$\Rightarrow$ l'équation du plan est

$-2x + z = d$. Pour $d$ on utilise A ou B.

On a, avec A, $-2(2) + (-1) = -5 = d$

D'où $-2x + z = -5 \iff \boxed{2x - z = 5}$ est l'équation du plan.

$\overbrace{\phantom{(1,-1,2)}}^{P}$

**3.** L'équation cartésienne du plan passant par le point $(1,-1,2)$ et contenant la droite d'équations paramétriques $x=4$, $y=-1+2t$, $z=2+t$ est:

A. $x+y-2z=-5$

B. $\boxed{y-2z=-5}$

C. $y+2z=-5$

D. $y-2z=5$

E. $x+y+2z=5$

F. $y+2z=5$

N.B. P n'appartient pas à la droite.

Maintenant, $Q=(4,-1,2)$ est un pt du plan et $\vec{d}=(0,2,1)$ est un vecteur directeur de la droite.

Donc $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{d}$ est normal au plan.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(0,-3,6)$$

Soit l'équation $-3y+6z=a$.

Pour $a$ on utilise P ou Q.

On a, avec P, $-3(-1)+6(2)=\boxed{15=a}$

D'où l'équation $-3y+6z=15 \Longleftrightarrow \boxed{y-2z=-5}$

**4.** L'équation paramétrique de la droite passant par les points $\overset{A}{(3,\ -1,\ 4)}$ et $\underset{B}{(-1,\ 5,\ 1)}$ est:

A. Une telle droite n'existe pas.

$\times\ \vec{d}\neq(-2,4,0) \leftarrow$ B. $x=1-2t,\ y=-5+4t,\ z=1;\ t\in\mathbb{R}$.

$\times\ \vec{d}\neq(-1,-6,3) \leftarrow$ C. $x=-1-t,\ y=5-6t,\ z=1+3t;\ t\in\mathbb{R}$.

$\times\ \vec{d}\neq(4,-6,1) \leftarrow$ D. $x=3+4t,\ y=-1-6t,\ z=4+t;\ t\in\mathbb{R}$.

✓ $\vec{d}=(4,-6,3) \leftarrow$ $\boxed{\text{E. } x=3+4t,\ y=-1-6t,\ z=4+3t;\ t\in\mathbb{R}.}$

$\times\ \vec{d}\neq(4,6,3) \leftarrow$ F. $x=-1+4t,\ y=5+6t,\ z=2+3t;\ t\in\mathbb{R}$.

Un vecteur directeur est:

$\vec{d}=\overrightarrow{BA}=(4,-6,3)$.

Donc l'équation paramétrique est

$\vec{x}=A+t\vec{d}$, $t\in\mathbb{R}$

(ou $\vec{x}=B+s\vec{d}$, $s\in\mathbb{R}$).

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=3+4t\\ y=-1-6t\\ z=4+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

**5.** Trouvez l'équation cartésienne du le plan avec équation paramétrique vectorielle

$$\vec{x} = (0,0,-2) + s\underbrace{(1,1,2)}_{\vec{u}} + t\underbrace{(2,-4,1)}_{\vec{v}}; s,t \in \mathbb{R}.$$

A. $x+y+2z=-4$

B. $2x-4y+z=-2$

C. $\boxed{3x+y-2z=4}$

D. $3x-y-2z=-4$

E. $9x+2y+5z=-6$

F. $9x-2y+5z=-1$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent ce plan.

Donc $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (9,3,-6)$

est normal à ce plan.

L'équation cartésienne est alors :

$9x+3y-6z=d.$

Mais $(0,0,-2)$ est un pt de ce plan.

$\Rightarrow \quad 9(0)+3(0)-6(-2) = \boxed{12 = d}$

D'où l'équation : $9x+3y-6z=12$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{3x+y-2z=4.}$

4

**6.** L'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont perpendiculaires à $\underbrace{(-1,1,5)}_{\vec{u}}$ et à $\underbrace{(2,1,2)}_{\vec{v}}$ est

× A. $\{(3,\ -12,\ 3)\}$

× B. $\{(t+3,\ -12,\ t+3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

✓ C. $\boxed{\{(t,\ -4t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

× D. $\{(-t,\ 0,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

× E. $\{(0,\ 0,\ 0)\}$

× F. $\{(3,\ 12,\ 3)\}$

Il suffit de calculer le produit scalaire de ces vecteurs avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

A. $(3,-12,3)\cdot(-1,1,5) = -3-12+15=0$
$(3,-12,3)\ (2,1,2) = 6-12+6 = 0$
Mais il y a un seul vecteur.
On peut voir que $r(3,-12,3) = (3r,-12r,3r)$
est aussi perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc il y a une infinité de vecteurs.

B. $(t+3,-12,t+3)\cdot(-1,1,5) = -(t+3)-12+5(t+3) = 4t = 0$ que si $t=0$.

C. $(t,-4,t)\cdot\vec{u} = -t-4t+5t=0$ et $(t,-4t,t)\cdot(2,1,2) = 2t-4t+2t=0$
pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D. $(-t,0,t)\cdot\vec{u} = t+0+5t = 6t = 0$ que si $t \neq 0$.
$((-t,0,t)\cdot\vec{v} = -2t+2t=0)$

E. $(0,0,0)\cdot\vec{u} = 0 = (0,0,0)\cdot\vec{v}$. Mais il n'y a qu'un seul vecteur.

F. $(3,12,3)\cdot(-1,1,5) = -3+12+15 = 24 \neq 0.$

**7.** L'angle entre les vecteurs $(0,\ 3,\ -3)$ et $(-2,\ 2,\ -1)$ est:

Soit $\theta$ cet angle.

A. $\pi/6$
B. $\pi/2$
C. $\boxed{\pi/4}$
D. $\pi/3$
E. $\pi/5$
F. $\pi/7$

On a : $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{(0)\cdot(-2)+(3)\cdot(2)+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{0^2+(3)^2+(-3)^2}\ \sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}}$

$\cos(\theta) = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ comme $0 \leq \theta \leq \pi$

**8.** La projection orthogonale, $\text{proj}_u v$, de $v = (-5,\ 1,\ 8)$ sur $u = (3,\ 0,\ 3)$ est:

A. $(1,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{8}{5})$
B. $(-1,\ \frac{1}{5},\ \frac{8}{5})$
C. $(-\frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{3}{2})$
D. $\boxed{(\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{3}{2})}$
E. $(5,\ -1,\ -8)$
F. $(-5,\ 1,\ -8)$

$\text{proj}_u v = \dfrac{v\cdot u}{\|u\|^2}\cdot u = \dfrac{(-5)\cdot(3)+(1)(0)+(8)(3)}{\left(\sqrt{3^2+0^2+3^2}\right)^2}\cdot u$

$= \dfrac{9}{2\cdot 9}\,(3,\ 0,\ 3) = \boxed{\dfrac{3}{2},\ 0,\ \dfrac{3}{2}}$

**9.** Le volume du parallélépipède avec sommet à l'origine et donné par les vecteurs $u = (1,1,2)$, $v = (0,2,5)$ et $w = (1,0,1)$ est:

- $\boxed{\text{A. 3}}$
- B. 7
- C. 9
- D. 10
- E. 11
- F. 14

$$\text{Volume} = \left| (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \right|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (1,-5,2)$$

$$\left| (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \right| = \left| (1,-5,2) \cdot (1,0,1) \right| = \boxed{3}$$

**10.** Trouvez l'aire du triangle dont les sommets sont $A = (-1,\ 5,\ 0)$, $B = (1,\ 0,\ 4)$ et $C = (1,\ 4,\ 0)$.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5
- $\boxed{\text{F. 6}}$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2,-5,4) \times (2,-1,0)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (4,8,8)$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \| (4,8,8) \| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2+8^2+8^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{144} = \boxed{6}$$

**11.** Trouvez

$$\left|\frac{3-i}{2-4i}\right| = \frac{|3-i|}{|2-4i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A. $1/2$
$\boxed{\text{B. } \sqrt{2}/2}$
C. $\sqrt{8/11}$
D. $8/25$
E. $3/2$
F. $\sqrt{14/11}$

**12.** Trouvez la forme polaire de

$$\frac{5+5\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} \quad \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$$

A. $5(\cos(\frac{5\pi}{12}) \boxed{-} i\sin(\frac{5\pi}{12})) = 5e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ ×
B. $5(\cos(\frac{11\pi}{12}) + i\sin(\frac{11\pi}{12})) = 5e^{i\frac{11\pi}{12}}$ ×
C. $5(\cos(\frac{7\pi}{12}) \boxed{-} i\sin(\frac{7\pi}{12})) = 5e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ ×
D. $5(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})) = 5e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ×
E. $5(\cos(\frac{11\pi}{12}) \boxed{-} i\sin(\frac{11\pi}{12})) = 5e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ ×
$\boxed{\text{F. } 5(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})) = 5e^{i\frac{7\pi}{12}}}$ ✓

- $|z_1| = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$
- $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$
- Si $\theta_1$ est l'argument de $z_1$ alors $\cos(\theta_1) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\Longrightarrow \theta_1 = \pi/3$.
- Si $\theta_2$ est l'argument de $z_2$, alors $\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
  $\Longrightarrow$ on peut prendre $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$
  (si on veut un angle dans $[0, 2\pi[$, on prend $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$).

Donc $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right) = \frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-(-\pi/4)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$
$= \boxed{5\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$