

## Chapter 3

# ESPACES VECTORIELS

### 3.1 Espaces vectoriels : définition et exemples

La théorie des chapitres 1 et 2 reposait essentiellement sur certaines propriétés algébriques simples et évidentes de  $\mathbb{R}^n$  : addition des vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire... Beaucoup d'autres systèmes mathématiques possèdent ces mêmes propriétés dont les plus utiles sont énumérées dans la définition ci-dessous.

**Definition 3.1.1** (Espace vectoriel). *On appelle espace vectoriel tout ensemble non vide  $V$  constitué d'objets appelés vecteurs, sur lequel sont définies deux opérations appelées **addition** et la **multiplication par un scalaire** (réel). Ces opérations vérifient les dix axiomes (ou règles) énumérés ci-dessous, pour quels que soient les vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  de  $V$  et les scalaires  $c$  et  $d$ .*

1. La somme de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , notée  $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ , est dans  $V$  (stabilité de  $V$  par rapport à l'addition).
2.  $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$  (commutativité).
3.  $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$  (associativité).
4. Il existe un vecteur de  $V$  dit **vecteur nul** ou **zéro**, noté  $\mathbf{0}$ , tel que  $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ .
5. Pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $V$ , il existe un vecteur  $-\mathbf{u}$  de  $V$ , appelé **vecteur opposé** de  $\mathbf{u}$ , tel que  $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ .
6. Le produit de  $\mathbf{u}$  par le scalaire  $c$ , noté  $c\mathbf{u}$ , est dans  $V$  (stabilité de  $V$  par rapport à la multiplication par un scalaire).
7.  $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$  (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).
8.  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$  (distributivité).
9.  $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ .
10.  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

De ces axiomes définissant un espace vectoriel découlent les propriétés suivantes

**Théorème 3.1.2.** (a) Le vecteur nul d'un espace vectoriel (axiome 4) est unique.

(b) L'opposé d'un vecteur (axiome 5) est unique.

(c) Pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $V$  et tout scalaire  $c$ ,

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1.1)$$

$$c\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (3.1.2)$$

$$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \quad (3.1.3)$$

**Proof:** La preuve de ce théorème est laissée en exercice ■

Maintenant on va voir quelques exemples classiques d'espaces vectoriels.

**Exemple 3.1.3.** L'espace  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ , avec  $n \geq 1$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  pour l'addition et la multiplication standards :

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ .
- Pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$ .
- Le vecteur nul de  $\mathbb{R}^n$  est  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- L'opposé du vecteur  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est  $-\mathbf{u} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ .

Les autres axiomes découlent immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 3.1.4.** Soit  $\mathcal{M}_{mn}$  l'ensemble de toutes les matrices de type  $m \times n$ . On caractérise une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{mn}$  par ses éléments  $a_{ij}$  situés à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  et on écrit  $A = [a_{ij}]$ . On muni  $\mathcal{M}_{mn}$  de l'addition et de la multiplication par un scalaire de la manière suivante :

- Si  $A = [a_{ij}]$  et  $B = [b_{ij}]$  sont dans  $\mathcal{M}_{mn}$ , alors  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
- Si  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$  et  $c \in \mathbb{R}$ ,  $cA = [ca_{ij}]$ .

Ces opérations vérifient les axiomes 1 et 6 car  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  et  $c\mathbf{A}$  sont bien des éléments de  $\mathcal{M}_{mn}$ . La matrice nulle, notée  $\mathbf{0}$ , dont tous les coefficients sont nuls, joue bien le rôle du vecteur nul pour l'addition dans  $\mathcal{M}_{mn}$ . L'opposé de  $A = [a_{ij}]$  est  $-A = [-a_{ij}]$ . Les autres axiomes résultent des propriétés de  $\mathbb{R}$  ; ainsi,  $\mathcal{M}_{mn}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 3.1.5** (Espace vectoriel  $\mathbb{P}_n$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ ). Pour  $n \geq 0$ , on désigne par  $\mathbb{P}_n$ , l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  :

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \quad (3.1.4)$$

où les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  ainsi que la variable  $t$  sont des réels. On appelle degré du polynôme  $\mathbf{p}$ , le plus grand exposant de  $t$  dans la formule (3.1.4). On définit sur  $\mathbb{P}_n$  l'addition et la multiplication par un scalaire de la manière suivante :

- Si  $\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$  et  $\mathbf{q}(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_nt^n$  sont dans  $\mathbb{P}_n$  alors

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n\end{aligned}$$

- Le produit de  $\mathbf{p}$  par un scalaire  $c$  est le polynôme  $c\mathbf{p}$  défini par

$$(c\mathbf{p})(t) = c\mathbf{p}(t) = ca_0 + (ca_1)t + \dots + (ca_n)t^n.$$

Ces définitions vérifient les axiomes 1 et 6, car  $\mathbf{p}+\mathbf{q}$  et  $c\mathbf{p}$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Les axiomes 2,3 et 7 et 10 résultent des propriétés des nombres réels. Le polynôme nul, dont tous les coefficients sont nuls, noté  $\mathbf{0}$ , possède la propriété du vecteur nul de l'axiome 4. Enfin,  $(-1)\mathbf{p}$  agit bien comme opposé de  $\mathbf{p}$ , donc l'axiome 5 est également vérifié. Ainsi,  $\mathbb{P}_n$  est un espace vectoriel.

**Exemple 3.1.6** (Espace  $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  des fonctions numériques définies sur  $D$ ). On désigne par  $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un certain ensemble  $D$  (typiquement un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ ). On définit l'addition de deux fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel de manière usuelle.

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$$

et

$$(c\mathbf{f})(t) = c\mathbf{f}(t).$$

Les axiomes 1 et 6 sont clairement vérifiés. Deux fonctions de  $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  sont égales si et seulement si leurs valeurs sont égales en tout point de  $D$ . Par conséquent, le vecteur nul de  $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  est la fonction identiquement nulle, notée  $\mathbf{0}$ , et l'opposé de  $f$  est  $(-1)f$ . Les autres axiomes résultent des propriétés de  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel.

### 3.2 Sous-espace vectoriel, sous-espace engendré

Dans beaucoup de situations, les espaces vectoriels rencontrés sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels plus larges. Dans ce cas, seuls trois des axiomes d'espace vectoriel sont à contrôler ; le reste est automatiquement vérifié.

**Definition 3.2.1** (Sous-espace vectoriel). *On appelle sous-espace vectoriel (ou encore sous-espace) d'un espace vectoriel  $V$  toute partie  $H$  de  $V$  possédant les propriétés suivantes :*

- Le vecteur nul de  $V$  appartient à  $H$ .*
- $H$  est stable par addition vectorielle, c'est-à-dire que pour tous vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $H$ , la somme  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  appartient à  $H$ .*
- $H$  est stable par multiplication par un scalaire, c'est-à-dire que pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $H$  et tout scalaire  $c$ , le vecteur  $c\mathbf{u}$  appartient à  $H$ .*

**Remarque 3.2.2.** • Certains auteurs remplacent la propriété a) d'un sous-espace vectoriel par l'hypothèse que  $H$  est non vide.

- Les trois propriétés d'un sous-espace vectoriel suffisent pour montrer qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

**Exemple 3.2.3.** • L'ensemble constitué uniquement du vecteur nul d'un espace vectoriel  $V$  est un sous-espace de  $V$  appelé **sous-espace nul** et noté  $\{0\}$ .

- L'ensemble  $\mathbb{P}$  de tous les polynômes à coefficients réels est un sous-espace de  $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Tout plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$

**Remarque 3.2.4.** •  $\mathbb{R}^2$  n'est pas un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ , car il n'est pas un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ .

- Un plan de  $\mathbb{R}^3$  qui ne passe pas par l'origine n'est pas un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ , car il ne contient pas le zéro de  $\mathbb{R}^3$ .

La notion de combinaison linéaire définie pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  se généralise aux espaces vectoriels :

**Definition 3.2.5** (Combinaison linéaire). *Étant donné une famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  d'un espace vectoriel  $V$  et des scalaires  $c_1, \dots, c_p$ , le vecteur  $\mathbf{w}$  de  $V$  défini par*

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

*est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ . Les scalaires  $c_1, \dots, c_p$  sont les **coefficients** de la combinaison linéaire. On note  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ , l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ .*

On a le théorème suivant :

**Théorème 3.2.6.** Si  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  sont des vecteurs d'un espace vectoriel  $V$ , alors  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Proof:** Il est clair que  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est un sous-ensemble de  $V$ .

- Le zéro de  $V$  appartient à  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  de coefficients tous nuls.
- Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  sont des éléments de  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  ; soient  $c_1, \dots, c_p$  et  $e_1, \dots, e_p$  des scalaires tels que  $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$  et  $\mathbf{w} = d_1 \mathbf{v}_1 + \dots + d_p \mathbf{v}_p$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{w} &= [c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p] + [d_1 \mathbf{v}_1 + \dots + d_p \mathbf{v}_p] \\ &= (c_1 + d_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (c_p + d_p) \mathbf{v}_p, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\mathbf{u} + \mathbf{w}$  est encore un élément de  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ . Donc  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est stable par rapport à l'addition.

(iii) Si  $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$  est un élément de  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  et  $c$  un scalaire, alors

$$c\mathbf{u} = c(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p) = (cc_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (cc_p)\mathbf{v}_p,$$

d'où  $c\mathbf{u}$  est un élément de  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ , et donc  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est stable par rapport à la multiplication par un scalaire.

On déduit donc de (i)-(iii) que  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . ■

**Definition 3.2.7 (Sous-espace engendré, partie génératrice).**  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est appelé *sous-espace (vectoriel) engendré* par l'ensemble  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , on appelle *partie génératrice* (respectivement *famille génératrice*) de  $H$ , une partie  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  (respectivement une famille  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ ) telle que  $H = Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

L'exemple suivant montre comment on utilise le théorème 3.2.6.

**Exemple 3.2.8.** Montrer que

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = a - 3b, x_2 = b - a, x_3 = a, x_4 = b, a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}\},$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

**Solution.** Chaque vecteur de  $H$  peut s'écrire sous la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a - 3b, b - a, a, b) = a(1, -1, 1, 0) + b(-3, 1, 0, 1), \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que  $H = Vect\{v_1, v_2\}$ , avec  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 0)$  et  $\mathbf{v}_2 = (-3, 1, 0, 1)$ . Donc, d'après le théorème 3.2.6,  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

### 3.3 Vecteurs linéairement indépendants, Bases d'un sous-espace

Étant donné une famille  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  de vecteurs d'un espace vectoriel  $V$ , si l'un des vecteurs (par exemple  $\mathbf{v}_p$ ) est combinaison linéaire des autres, alors on a intuitivement  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} = Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}\}$ . Dans cette section, on se propose de montrer qu'on peut extraire de  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  une sous famille la plus petite qui est encore une famille génératrice de  $Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

**Definition 3.3.1.** Les vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  d'un espace vectoriel  $V$  sont dits *linéairement indépendants* si la seule combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  qui est égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. En d'autre terme, les vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  sont *linéairement indépendants* si l'équation vectorielle

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \tag{3.3.1}$$

admet la solution triviale  $c_1 = 0, \dots, c_p = 0$  comme seule solution.

Une **famille**  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  constituées de vecteurs linéairement indépendants est dite **libre**. La famille est dite **liée** et ses vecteurs **linéairement dépendants** (ou **liés**) si l'équation vectorielle (3.3.1) admet une solution non triviale.

**Exemple 3.3.2.** Les vecteurs  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement indépendants. En effet, la méthode du pivot appliquée à la matrice  $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{0}]$  donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui montre que le système de matrice augmentée  $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{0}]$  admet la solution triviale comme unique solution (le système est compatible et chaque colonne de la matrice des coefficients est une colonne pivot). Donc les vecteurs  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$  sont linéairement indépendants.

**Exemple 3.3.3.** La famille  $(\sin(t), \cos(t))$  est libre dans  $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ . En effet, si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux scalaires tels que

$$c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) = \mathbf{0}, \text{ pour tout } t \in [0, 2\pi],$$

avec  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$  alors on aurait  $\cos(t) = c \sin(t)$  ou  $\sin(t) = c \cos(t)$ , pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ . Cela est impossible par rapport à la définition de l'égalité de deux fonctions. Donc,  $c_1 = c_2 = 0$  et la famille  $(\sin(t), \cos(t))$  est bien libre dans  $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

**Exemple 3.3.4.** La famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ , avec  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix}$ , des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est liée. En effet, en appliquant la méthode du pivot on a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui montre que l'équation vectorielle

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

admet des solutions non triviales,  $c_1 = -5c_3$  et  $c_2 = -3c_3$  avec  $c_3 \neq 0$ . En particulier, pour  $c_3 = 1$ , on a  $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ .

L'exemple 3.3.4 est une illustration du théorème suivant :

**Théorème 3.3.5.** Une famille  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  d'au moins deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel  $V$  est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.

**Definition 3.3.6** (base d'un sous-espace). Soit  $H$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $V$ . On dit qu'une famille  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p)$  de vecteurs de  $V$  est une **base** de  $H$  si

- (i)  $\mathcal{B}$  est une famille libre;
- (ii) le sous-espace engendré par  $\mathcal{B}$  est  $H$ , autrement dit

$$H = \text{Vect} \{ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p \}.$$

Cette définition s'applique au cas où  $H = V$ , puisqu'un espace vectoriel est un sous-espace de lui-même. On peut aussi noter que si  $H \neq V$ , la condition (ii) implique que chacun des vecteurs  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$  doit appartenir à  $H$ , car  $\text{Vect} \{ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p \}$  contient chacun des vecteurs  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ .

**Exemple 3.3.7** (Base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ). La famille  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est une base de  $\mathbb{R}^n$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 3.3.8** (base canonique de  $\mathcal{M}_{mn}$ ). La famille  $(e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23})$  des éléments de  $\mathcal{M}_{23}$  tels que

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une base de  $\mathcal{M}_{23}$  appelée **base canonique** de  $\mathcal{M}_{23}$ .

**Exemple 3.3.9** (base canonique de  $\mathbb{P}_n$ ). La famille  $F = (1, t, t^2, \dots, t^n)$  est une base de l'espace vectoriel des polynômes  $\mathbb{P}_n$ , appelée base canonique de  $\mathbb{P}_n$ .

**Théorème 3.3.10** (Représentation d'un vecteur). Si  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  est une base d'un espace vectoriel  $V$ , alors pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $V$ , il existe une famille unique  $(c_1, \dots, c_n)$  de scalaires tels que

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n. \quad (3.3.2)$$

**Proof:** L'existence des scalaires  $(c_1, \dots, c_n)$  découle du fait que  $\mathcal{B}$  engendre  $V$ . Supposons qu'il existe une autre famille de scalaires  $(d_1, \dots, d_n)$  tels que

$$\mathbf{v} = d_1 \mathbf{b}_1 + \dots + d_n \mathbf{b}_n.$$

En comparant la dernière identité et l'identité (2.3.2) on trouve

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{b}_n.$$

Puisque  $\mathcal{B}$  est une famille libre, on a  $c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0$ ; d'où  $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$ . ■

**Definition 3.3.11.** Si  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  est une base d'un espace vectoriel  $V$ , alors, pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $V$ , les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  tels que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n,$$

sont appelés **composantes** ou **coordonnées** de  $\mathbf{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si  $c_1, \dots, c_n$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{v}$  dans  $\mathcal{B}$ , alors le vecteur de  $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

est appelé **vecteur** ou **colonne de composantes** de  $\mathbf{v}$  (dans la base  $\mathcal{B}$ ).

**Exemple 3.3.12.** On considère la base  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Soit  $\mathbf{v}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  dont les composantes dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Déterminer le vecteur  $\mathbf{v}$  (dans la base canonique).

**Solution.** D'après la définition 3.3.11 on a

$$\mathbf{v} = (-2)\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**Exemple 3.3.13.** Soient  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , avec  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Déterminer les composantes du vecteur  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Solution.** Les composantes de  $\mathbf{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par l'unique solution  $(c_1, c_2, c_3)$  de l'équation vectorielle

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la méthode du pivot à la matrice complète de ce système on trouve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -2$  et  $c_3 = 1$ , et on déduit que  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Théorème 3.3.14** (Théorème de la base extraite). Soit  $F = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  une famille d'un espace vectoriel  $V$  et  $H = Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

- Si l'un des vecteurs de  $F$  (disons  $\mathbf{v}_k$ ) est une combinaison linéaire des autres vecteurs de  $F$ , alors la famille obtenue en supprimant dans  $F$  le vecteur  $\mathbf{v}_k$  engendre toujours  $H$ .
- Si  $H \neq \{\mathbf{0}\}$ , alors il existe une sous-famille de  $F$  qui est une base de  $H$ . Autrement dit, on peut extraire de la famille  $F$  une base de  $H$ .

**Proof:**

- Moyennant un réarrangement d'éléments de  $F$ , on peut supposer que c'est  $\mathbf{v}_p$  qui est combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\mathbf{v}_p = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}.$$

Soit  $\mathbf{x} \in H$ , alors il existe des scalaires  $d_1, \dots, d_p$  tels que

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + \dots + d_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + d_p\mathbf{v}_p,$$

et en substituant  $\mathbf{v}_p$  par son expression donnée par la précédente identité on trouve

$$\mathbf{x} = (c_1d_p + d_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_{p-1}d_p + d_{p-1})\mathbf{v}_{p-1},$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{x} \in Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}\}$ . D'où  $H \subset Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}\}$ , et puisque l'inclusion inverse est évidente on déduit que  $H = Vect\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}\}$ .

- Si  $F$  est libre, alors c'est déjà une base de  $H$ . Sinon, il existe dans  $F$  un vecteur qui est combinaison linéaire des autres et, d'après le point (a) on peut le supprimer. On répète ce processus, tant qu'il existe au moins deux vecteurs dans la famille génératrice, jusqu'à obtenir une base. Si à la fin il ne reste qu'un vecteur, celui-ci est forcément non nul, donc une famille libre, car  $H \neq \{\mathbf{0}\}$ .

■

Le théorème suivant donne un procédé pour extraire une base d'une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.3.15.** Les colonnes pivots d'une matrice  $A$  forment une base du sous-espace engendré par les colonnes de cette matrice.

**Exemple 3.3.16.** On considère les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^4$  :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer une base du sous-espace  $H = Vect\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ .

**Solution :** En appliquant la méthode du pivot à la matrice  $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5]$ , on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes 1,3 et 4 de  $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5]$  étant pivots, on déduit du théorème 3.3.15 que la famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  est une base de  $H$ .

**Remarque 3.3.17.** D'après la forme échelonnée de la matrice  $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ , l'équation vectorielle

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$$

admet une infinité de solutions, avec  $c_1 = -3c_2 - 7c_5$ ,  $c_3 = -c_5$  et  $c_4 = 2c_5$  pour tout  $c_2, c_5 \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, la famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  est liée avec  $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1$  (prendre  $c_2 = 1$  et  $c_5 = 0$ ) et  $\mathbf{v}_5 = 7\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4$ . On peut donc déduire du théorème 3.3.14 que  $Vect\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = Vect\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ . Par ailleurs, on vérifie facilement que la famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  est libre ; d'où elle forme une base de  $H$ .

### 3.4 Dimension d'un espace vectoriel

Dans cette section, on présente quelques propriétés intrinsèques à tout espace vectoriel qui possède une base constituée d'une famille finie de vecteurs.

**Théorème 3.4.1.** Soit  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $p > n$ , alors la famille  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  est liée.

**Proof:** L'équation vectorielle

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

est équivalente à un système homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Le nombre de position de pivot dans la matrice des coefficients du système est donc inférieur ou égal à  $n$ . D'où, si

$p > n$ , le système possède au moins une variable secondaire et donc la famille  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  est liée. ■

**Théorème 3.4.2.** Si un espace vectoriel  $V$  admet une base  $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , constituée de  $n$  vecteurs, alors toute famille de vecteurs de  $V$  contenant strictement plus de  $n$  vecteurs est nécessairement liée.

**Proof:** Soit  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  une famille de vecteurs de  $V$  comportant strictement plus de  $n$  vecteurs. Alors, d'après le théorème 3.4.1 la famille  $([\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}})$  est liée dans  $\mathbb{R}^n$ . Il existe donc des scalaires  $c_1, \dots, c_p$ , non tous nuls tels que

$$c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \dots + c_p[\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.4.1)$$

Dans la base  $\mathcal{B}$ , en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_1^1 \mathbf{b}_1 + \dots + u_1^n \mathbf{b}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_p &= u_p^1 \mathbf{b}_1 + \dots + u_p^n \mathbf{b}_n, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p &= c_1(u_1^1 \mathbf{b}_1 + \dots + u_1^n \mathbf{b}_n) + \dots + c_p(u_p^1 \mathbf{b}_1 + \dots + u_p^n \mathbf{b}_n) \\ &= (c_1 u_1^1 + \dots + c_p u_p^1) \mathbf{b}_1 + \dots + (c_1 u_1^n + \dots + c_p u_p^n) \mathbf{b}_n. \end{aligned}$$

D'où

$$[c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 u_1^1 + \dots + c_p u_p^1 \\ \vdots \\ c_1 u_1^n + \dots + c_p u_p^n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^n \end{bmatrix} + \dots + c_p \begin{bmatrix} u_p^1 \\ \vdots \\ u_p^n \end{bmatrix},$$

et on déduit que

$$c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \dots + c_p[\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = [c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}}.$$

En substituant la dernière identité dans (3.4.1), on trouve

$$[c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

ce qui implique que  $c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$ . Puisque les coefficients  $c_1, \dots, c_p$  ne sont pas tous nuls on déduit que la famille  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  est liée. ■

Le théorème 3.4.2 implique que dans un espace vectoriel  $V$  admettant une base constituée de  $n$  vecteurs, toute famille libre de vecteurs de  $V$  contient au plus  $n$  vecteurs. Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant

**Théorème 3.4.3.** Si un espace vectoriel  $V$  admet une base de  $n$  vecteurs, alors toutes les autres bases de  $V$  comportent exactement  $n$  vecteurs.

**Proof:** Soient  $\mathcal{B}_1$  une base de  $V$  comportant  $n$  vecteurs et  $\mathcal{B}_2$  une autre de base de  $V$ . Alors, d'après le théorème 3.4.2, puisque  $\mathcal{B}_1$  est une base et que  $\mathcal{B}_2$  est une famille libre,  $\mathcal{B}_2$  contient au maximum  $n$  vecteurs. De même, comme  $\mathcal{B}_2$  est une base et que  $\mathcal{B}_1$  est une famille libre,  $\mathcal{B}_2$  contient au minimum  $n$  vecteurs. Donc  $\mathcal{B}_2$  contient exactement  $n$  vecteurs. ■

Le théorème de la base extraite combiné avec le théorème 3.4.3 assure que la définition suivante a un sens.

**Definition 3.4.4.** Soit  $V$  un espace vectoriel non nul. S'il existe une famille finie qui engendre  $V$ , on dit que  $V$  est de **dimension finie**. On appelle alors **dimension** de  $V$ , et l'on note  $\dim V$ , le nombre de vecteurs dans une base de  $V$ .

On définit la dimension de l'espace nul  $\{0\}$  comme étant égale à zéro. S'il n'existe aucune famille finie engendrant  $V$ , on dit que  $V$  est de **dimension infinie**.

**Exemple 3.4.5.** • La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  contient  $n$  vecteurs, donc  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

- La base canonique de  $\mathbb{P}_n$  est constituée de  $(n + 1)$  vecteurs, donc  $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$ .
- La base canonique de  $\mathcal{M}_{m \times n}$  contient  $m \times n$  vecteurs, donc  $\dim \mathcal{M}_{m \times n} = m \times n$ .
- Il n'existe pas une famille finie de polynôme qui engendre l'ensemble  $\mathbb{P}$  de tous les polynômes, la dimension de  $\mathbb{P}$  est donc infinie.

**Exemple 3.4.6.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Solution .** On voit que  $H = \text{Vect} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \}$ , avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur  $\mathbf{v}_3$  est colinéaire à  $\mathbf{v}_2$ , donc d'après le théorème de la base extraite, la famille obtenue en supprimant  $\mathbf{v}_3$  est encore génératrice de  $H$ , c'est-à-dire qu'on a encore  $H = \text{Vect} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \}$ . Par ailleurs,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  ne sont pas colinéaires et  $\mathbf{v}_4$  n'est pas combinaison linéaire de  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Donc la famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$  est libre; c'est donc une base de  $H$ . On déduit que  $\dim H = 3$ .

**Théorème 3.4.7** (Théorème de la base incomplète). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre de vecteurs de  $V$  peut être complétée de manière à former une base de  $V$ .

**Proof:** Soit  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  une famille libre de vecteurs de  $V$ . Si  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  engendre  $V$  alors c'est une base de  $V$ . Sinon, il existe un vecteur  $\mathbf{u}_{k+1}$  de  $V$  n'appartenant pas à  $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ . D'après le théorème 3.3.5, la famille  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1})$  est libre car aucun vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres. On poursuit ce processus (cette complétion) tant que la famille libre obtenue n'engendre pas  $V$ . Le processus se termine nécessairement car, d'après le théorème 3.4.2, aucune famille libre de  $V$  ne peut contenir plus de vecteurs que la dimension de  $V$ . ■

**Remarque 3.4.8.** Le théorème 3.4.7 indique que si  $H$  est un sous-espace vectoriel d'un espace  $V$  de dimension finie, alors  $\dim H \leq \dim V$ .

Le théorème suivant indique qu'on peut facilement déterminer la base d'un espace vectoriel quand on connaît sa dimension.

**Théorème 3.4.9** (Caractérisation des bases). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $n \geq 1$ . Alors, toute famille libre contenant exactement  $n$  éléments de  $V$  est automatiquement une base de  $V$ . Toute famille contenant exactement  $n$  éléments qui engendre  $V$  est automatiquement une base de  $V$ .

**Proof:** Soit  $F$  une famille libre contenant exactement  $n$  vecteurs de  $V$ . D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter  $F$  de manière à former une base de  $V$ . Mais comme  $V$  est de dimension  $n$ , cette base contient exactement  $n$  vecteurs ; donc  $F$  est déjà une base de  $V$ . Supposons maintenant que  $F$  contient exactement  $n$  éléments et engendre  $V$ . Comme  $V$  n'est pas réduit au vecteur nul, le théorème de la base extraite permet d'affirmer qu'il existe une base  $F'$  de  $V$  extraite de  $F$ . Comme  $\dim V = n$ ,  $F'$  contient exactement  $n$  vecteurs. Donc  $F = F'$ . ■